

哲人石  
丛书

当代科技名家传记系列

# 知无涯者

科学·技术·人生·文化



哲人石  
丛书

## 知无涯者

『一位不可思议的数学奇才的短促人生』

# 拉马努金 传

上海科技教育出版社

麦柏特·卡坦格拉·A.

译者：齐欣友

上海科技教育出版社

名人传  
丛书

当代科技名家传记系列

人生舞台

——阿西莫夫自传

奇异之美

——盖尔曼传

知无涯者

——拉马努金传

『一位不可思议的数学奇才的短促人生』



9 787542 829795 >

ISBN 7-5428-2979-3/N · 485

定价：33.30元

哲人石  
丛书

当代科技名家传记系列

Philosopher's Stone Series

# 知无涯者

拉马努金传

罗伯特·卡尼格尔 著

胡乐士 齐民友 译



上海科技教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

知无涯者:拉马努金传/(美)卡尼格尔(Kanigel, R.)著;胡乐士,齐民友译.—上海:上海科技教育出版社,2002.10  
(哲人石丛书·当代科技名家传记系列)

书名原文: The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan

ISBN 7-5428-2979-3

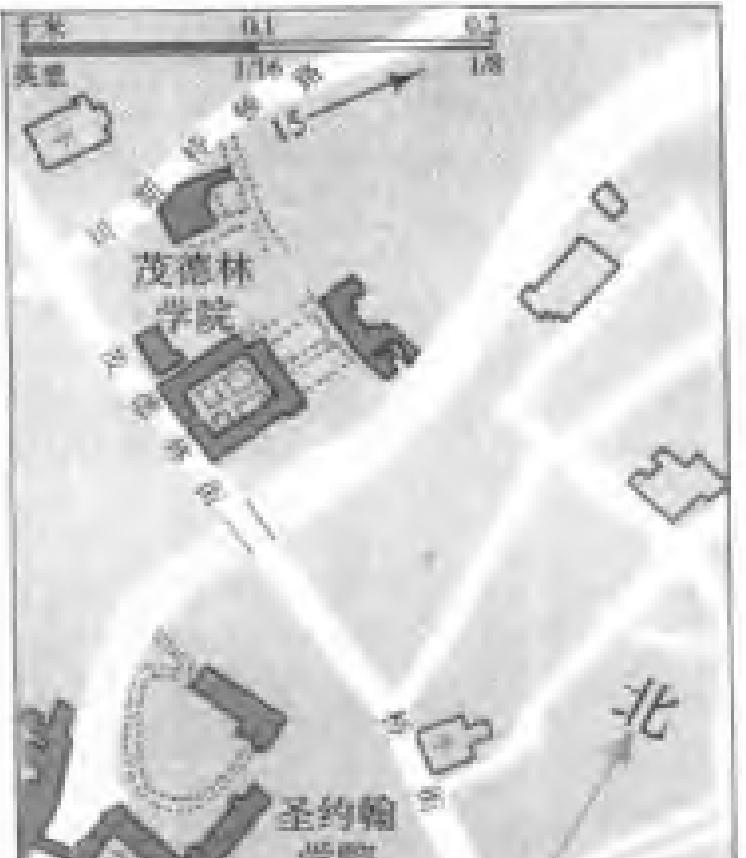
I. 知... II. ①卡... ②胡... ③齐... III. 拉马努金, S.A. (1887~1920)—传记 IV. K833.516.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 065746 号



# 剑 桥

1. 新庭院
2. 哈代的房间
3. 主教寄宿宿舍
4. 拉马努金的  
房间, 约 1916 年
5. 内维尔庭院
6. 李特伍德的房间
7. 大庭院
8. 惠威尔庭院
9. 拉马努金的  
房间, 约 1915 年
10. 滚木球草地
11. 大厅
12. 大门
13. 雷恩图书馆
14. 评议会
15. 内维尔的家。  
切斯特顿路 113 号



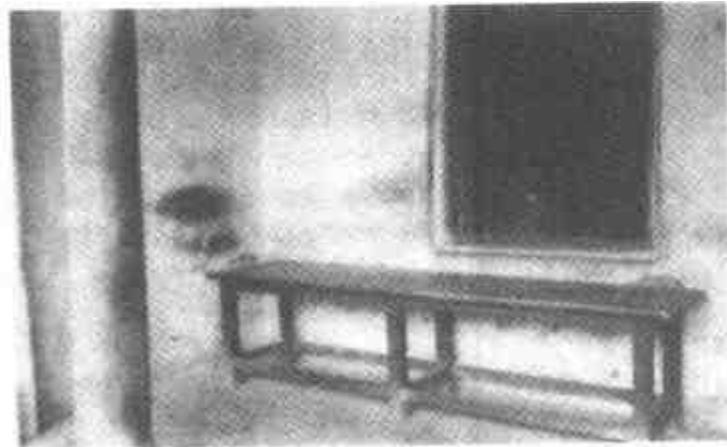
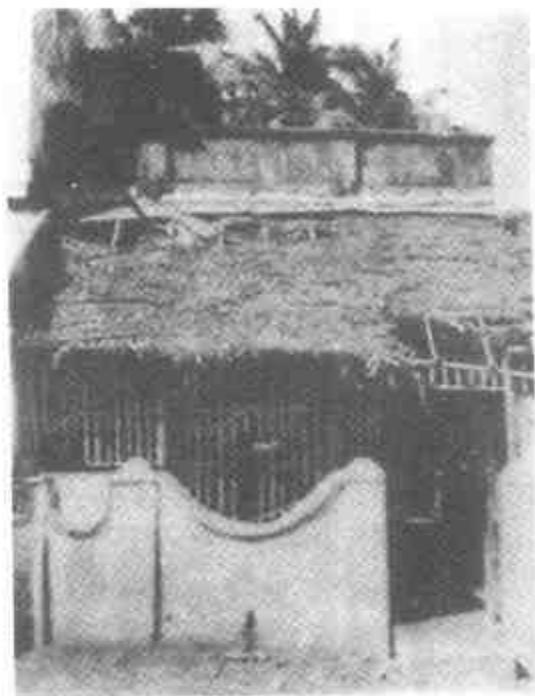


护照照片。拉马努金于 1919 年回印度时所摄。1937 年哈代第一次看到此照时说：“他看来病得很重，但仍是与以往一样的大才。”(Master and Fellows of Trinity College, Cambridge)



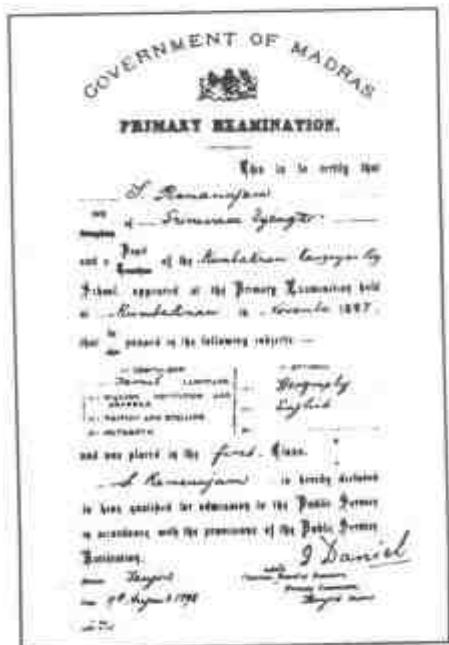
拉马努金的母亲柯马拉塔马尔，在他青年时期对他有决定性的影响。拉马努金的父亲斯里尼瓦萨·耶恩伽尔的照片今已无存。(Ragamu's Collections, Madras, South India)

南印度贡伯戈纳姆萨兰伽帕尼·三尼第街上拉马努金家的房子，他上中学时，有一次发现一个原以为是自己找到的公式，却在 150 年前早就有了；他十分震惊，就把写了这个公式的纸藏在这所房子的屋顶下。(Ragami's Collections, Madras, South India)



贡伯戈纳姆拉马努金家的房子前廊近照。他在  
这里可以一坐几个小时  
做数学，而他的朋友们  
却在街上玩。

拉马努金在这次考试中得了高分，当时他  
只有 9 岁。但后来，他找到了数学，对别的  
一切都没有兴趣了，自此他经常考不及格。  
这里，拉马努金的泰米尔文名字用英文拼  
写成了 Ramanujam。(Ragami's Collections,  
Madras, South India)





萨兰伽帕尼庙近照，庙在拉马努金家门前街的尽头，图中右方可以看到拉马努金的家。



拉马努金的故乡贡伯戈纳姆市立中学校园近影，他在此读书时是一个常规的好学生，能得到各种奖项和长辈的称赞。



此屋现在称为拉马努金厅，是市立中学为纪念最杰出的校友而设。当时拼写他的名字最后一个字母为m，这是泰米尔文转为英文时常用的字母对照，他最初出现在印度的数学刊物上就是用的这种拼法。

拉马努金之弟蒂鲁纳拉亚南。他生于 1905 年，那时拉马努金已 17 岁，常常带弟弟玩，把他扛在肩膀上，给他讲故事。（Ragami's Collections, Madras, South India）



拉马努金之妻佳娜琪。此照为拉马努金去世后所摄。当时她寡居一人，与拉马努金一家几乎断绝联系，以缝纫为生。（Ragami's Collections, Madras, South India）



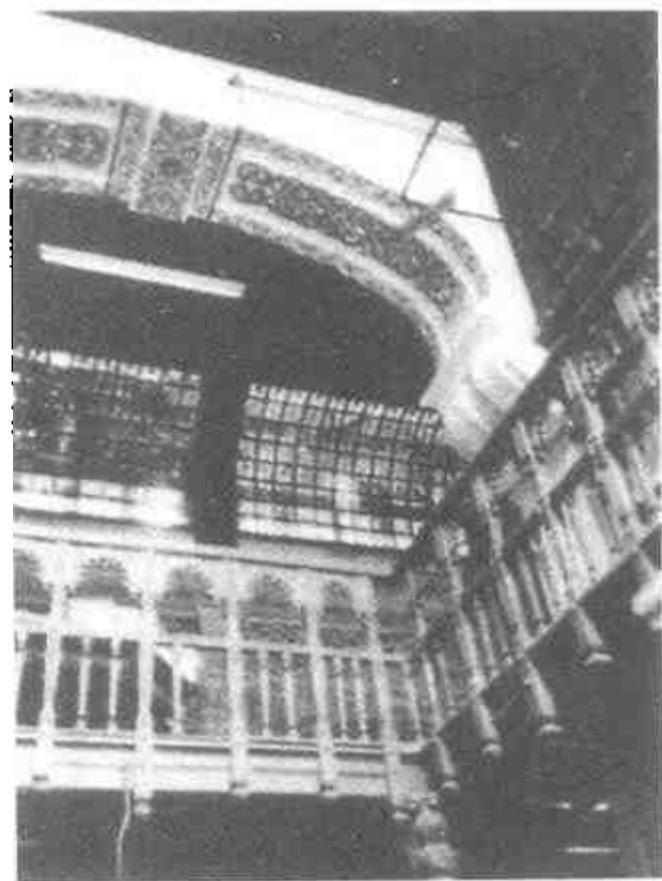
纳拉亚纳·耶尔，拉马努金在马德拉斯港务信托处的顶头上司，是他最亲密的伙伴，本人也是一位很好的数学家。两人时常共同研究数学直到深夜，拉马努金能把许多步骤缩为一步的本事使他十分吃惊。他抱怨说：“您必须下降到我的理解水平。”(Ragami's Collections, Madras, South India)



塞舒·耶尔，拉马努金在贡伯戈纳姆政府学院的教学教师之一，后来也是他的支持者之一。但有一位朋友还记得拉马努金曾抱怨他对自己和自己的研究工作“很冷淡”。(Ragami's Collections, Madras, South India)

马德拉斯维多利亚寄宿宿舍近照。拉马努金婚后，曾走遍南印度找一份工作或一位赞助者，他的朋友们常收留他一段时间。当他借住此宿舍时，曾把自己潦倒的命运与受到宗教法庭审判又为同时代人所误解的伽利略相比。





康纳马拉图书馆近照。当拉马努金收到哈代的第一封赞扬信后，即被任命为马德拉斯大学的研究学者。他有生以来第一次不必为金钱担忧，可以来到康纳马拉图书馆忘情于数学之中



拉马努金的家神娜玛吉利之神庙。拉马努金和纳拉亚纳·耶尔于 1913 年下半年来到南印度纳马卡尔城的这座庙中，在地上住了三夜，最终决定违反印度教传统去英国。



霍布森(左)与贝克(下)。两位都是剑桥著名的数学家，都收到拉马努金的求助信，但都置之不理。(Master and Fellows of Trinity College, Cambridge)





祭祀仪式时信徒沐浴的大水池。在帕塔莎拉蒂庙对面，该庙是马德拉斯特里普利卡内区中心的宗教神庙。拉马努金在赴英前一段时期就住在通向水池的特里普利卡内街旁。

(1)

In page 46 it is stated that "the no of primes less than  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  & for values of  $x$  greater than  $\frac{1}{2}$  we get them determined".  
The prime order itself is not sufficient to find the value of  $p(x)$ . Even if it is known that  $\frac{1}{2} < x < 1$ , when  $x$  becomes infinite, for being a known fraction of  $\frac{1}{2}$ , this cannot be supposed to have been found with sufficient accuracy. For example  $(x + \frac{1}{2})^2/x = 1$ , when  $x$  becomes infinite, yet the difference between  $x + \frac{1}{2}$  and  $x$  is very great.

From the forms of  $p(x)$  given on page 47, very often  $O(\frac{1}{x^{1/2}})$ ,  $O(x^{-1/2})$ , etc. it appears that from particular numerical values the forms have been guessed.  
Even in regular functions it is difficult to know what idea of the form from the numerical values. To find a complicated function as  $p(x)$  it is difficult to have an idea even for large values of  $x$ ; for example even if we give below for  $x$ ,  $p(x)$  is very difficult to be found.

I have observed that  $p(x)$  is of such a nature that its value is very small when  $x$  lies between 0 and 3 (its value is less than a few hundred when  $x = 3$ ) and rapidly increases when  $x$  is greater than 3 ( $x > 3$ ).

I have found a function which exactly represents the no of primes less than  $x$ , namely in the sense that the difference between the function and the actual no of primes is generally  $\pm$  or more small finite value even when  $x$  becomes infinite.

(2)

#### III. Theorem on Continued Fractions.

A few examples:-

$$(i) \frac{1}{x-a} \frac{1}{x-b} \frac{1}{x-c} \frac{1}{x-d} \dots = \left\{ \frac{\Gamma(\frac{x-a}{2})}{\Gamma(\frac{x-a+1}{2})} \right\}^2$$

$$(ii) \frac{1}{x-a} \frac{1}{x-b} = \frac{\Gamma(\frac{x-a+b-1}{2})}{\Gamma(\frac{x-a-b+1}{2})} \times \frac{\Gamma(\frac{x-a-b+1}{2})}{\Gamma(\frac{x-a-b-1}{2})}, \text{ then}$$

$$\frac{1}{x-a} \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x-a} \frac{1}{x-b} \frac{1}{x-a-b} \frac{1}{x-a-b-2} \dots$$

$$(iii) If  $x = 1 + \alpha t^2 + \dots$  then  $y = \frac{1}{t} \frac{1 + \alpha t^2 + \dots - (\frac{1}{t})^2(1+\alpha t^2 + \dots)}{1 + \alpha t^2 + (\frac{1}{t})^2(1+\alpha t^2 + \dots)}$$$

$$= \frac{1}{t} \frac{1 + \alpha t^2 + \dots - \frac{1}{t^2}(1+\alpha t^2 + \dots)^2}{1 + \alpha t^2 + \frac{1}{t^2}(1+\alpha t^2 + \dots)^2}$$

or by any quantity

$$(iv) If  $x = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots}}}$  then  $x^2 = \frac{1}{1-\frac{1+2x+x^2}{1-\frac{1+2x+x^2}{1-\dots}}}$   
and  $x^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\dots}}}$   $\frac{1}{1-\frac{1+2x+x^2}{1-\frac{1+2x+x^2}{1-\dots}}}$$$

$$\text{then } x^2 = x \frac{1+2x+x^2-1-2x-x^2}{1+2x+x^2-1+2x+x^2} = x$$

$$(v) \frac{1}{1-\frac{1-x^2}{1-\frac{1-x^2}{1-\dots}}} = (\sqrt{\frac{1-x^2}{1}} - \sqrt{x^2}) \sqrt{x^2}$$

$$(vi) \frac{1}{1-\frac{1-x^2}{1-\frac{1-x^2}{1-\dots}}} = (\sqrt{\frac{1-x^2}{1}} - \sqrt{x^2}) \sqrt{1-x^2}$$

$$(vii) \frac{1}{1-\frac{1-x^2}{1-\frac{1-x^2}{1-\dots}}} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ can be easily found if } n \text{ be any positive rational quantity}$$

X

拉马努金 1913 年从印度寄给哈代的九页数学结果的第一页。(Syndics of Cambridge University Library)

拉马努金给哈代的第一封信中较典型的一页。(Syndics of Cambridge University Library)



哈代的双亲：索菲娅和艾萨克·哈代，索菲娅为人正直，虔诚，有些顽固；艾萨克则是一位“白衣骑士”，“没有说过一句不仁慈的话”。  
(Master and Fellows of Trinity College, Cambridge)



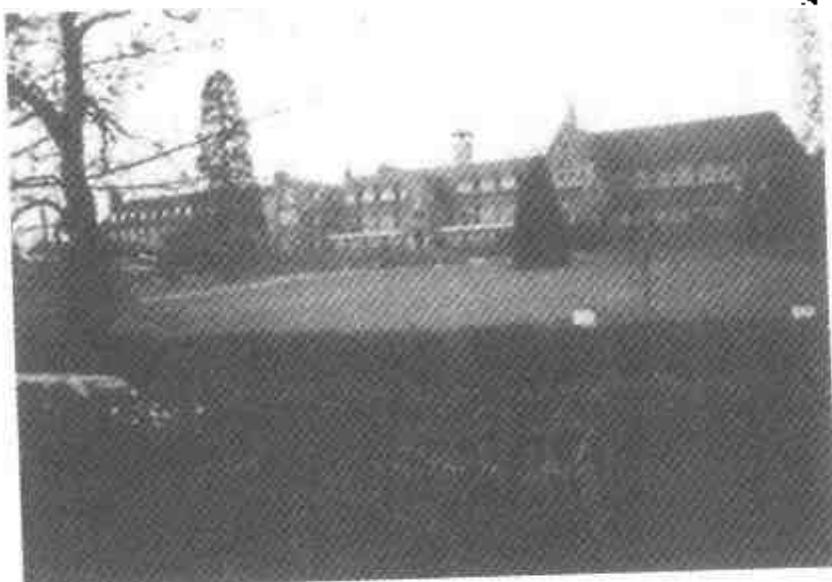
哈代。在认识拉马努金前不久拍攝，當時他已是皇家學會會員。斯諾有一次說他“臉部很漂亮——高高的顴骨，細長的鼻子，清秀嚴肅”。(Master and Fellows of Trinity College, Cambridge)



格特魯德，哈代的妹妹。兩人均未婚，均終生沉溺于學術，醉心于智慧而藐視教條。(Master and Fellows of Trinity College, Cambridge)



“乐山居”，哈代童年时就住在这里，与克兰利中学隔一条马路。这是一幅新照片，右侧角落处的人口是后来建的。



克兰利中学被认为是一所“中产阶级学校”，此为现景。哈代的父亲是图画教师，母亲则是路对面预备学校的主任。哈代本人在这里读了几年书，13岁转到一所所有更高学术要求的学校去了。



温切斯特学校的一个庭院，该校是一个传统的英国公立学校，可追溯到14世纪。哈代不喜欢它，显然再也没有回来看过。



李特尔伍德是 1905 年的优等生，这种荣誉称号授给著名的数学 Tripos 考试得分最高者，其在英国学术界的地位大致相当于同时获得全美国优秀生、罗兹奖学金和当年最佳学士。拉马努金寄自印度的神奇信件，哈代就是交给他的。  
( Master and Fellows of Trinity College, Cambridge )



内维尔是哈代派去会见拉马努金的使者  
他于 1913 年冬去马德拉斯作一系列讲座，哈代还交给他一件工作，即把拉马努金带到英国来。  
( Master and Fellows of Trinity College, Cambridge )

伦敦南肯辛顿区克伦威尔路 21 号，长期以来是印度学生到英国后的第一站。拉马努金于 1914 年 4 月中住在这里。此图是现景。



切斯特顿路 113 号。内维尔夫妇于 1913 年购此屋，1914 年拉马努金在此住了两个月。



三一学院的新庭院。哈代认识拉马努金时就住在这里。  
(Master and Fellows of  
Trinity College, Cambridge)



三一学院的雷恩图书馆。这是近期从后院拍摄的现景。哈代住在其右面一幢房子的二楼，房间位于进入新庭院的大门上方。



主教寄宿宿舍。大约 1915 年到 1917 年拉马努金就住在最上层右侧那个窗子强烈反光的房间里（其正下方有一个模糊的人影），从这个窗口拉马努金可以看见学院餐厅陡峭的尖屋顶。但由于他的严格素食习惯，他从未与三一学院的其他学者一起用餐。（Master and Fellows of Trinity College, Cambridge）

哈代 1918 年 2 月就他们共同的研究工作给拉马努金的信之最后一页，当时拉马努金正因病住院。  
 ( Master and Fellows of Trinity  
 College, Cambridge )

R. J. L. H.

$\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 + O(x^{2-\frac{1}{3}})$   
 - if  $f''(x) < 0$  and  $O(x^{\frac{2}{3}})$

(1)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} < 0$  if  $f''(x) < 0$

(2) if  $x$  integer is  $0.111\ldots$   
 $O$  exactly

If I get out my nose I will write  
 to you again. If with you were  
 letter not lost here there would  
 be some splendid portions to such  
 it. I don't know if you feel well  
 enough to such about such difficult  
 things yet.

I hope it is not so healthy cold now  
 as it was.

With kind regards  
 Yours most sincerely  
 G. H. Hardy

But at present you must do what the  
 doctor says. However you might be able  
 to disillusion them though a little by  
 an easy writing.

G. H. H.



A. S. 拉马林甘，工程师。拉马努金初到英国时相识，三年后，拉马林甘去马特洛克结核病疗养院看望拉马努金。拉马努金在此的憔悴情景和挑剔的饮食习惯使他十分忧虑。  
 (Ragami's Collections, Madras, South India)



印度于1962年发行的拉马努金纪念邮票。



“哥美特拉”，拉马努金去世于此。  
在马德拉斯的切特普特区，亨廷顿路上。  
(Ragami's Collections, Madras, South India)



P.S.钱德拉塞卡，拉马努金在印度的医生。拉马努金去世次日，他在日记中写道：“深切的悲哀，欲哭无泪。”  
(Ragami's Collections, Madras, South India)

全盛时期的哈代。有人后来说过“只有在英国公学读过书的人，才会有这样的坐姿”。  
( Master and Fellows of Trinity College, Cambridge )



这是《图片邮报》的记者在 1941 年抢拍的一张照片。当时哈代正在看剑桥和牛津的橄榄球赛。在经历了一个似乎无限的青春以后，这时他已经 64 岁。  
( Master and Fellows of Trinity College, Cambridge )

知

无

涯

者

## 拉马努金传



# 对本书的评价

拉马努金对于数学是一块宝石……正如莫扎特之于音乐，爱因斯坦之于物理。

——克利福德·斯托尔(Clifford Stoll)，  
《杜鹃蛋》一书作者

一幅精美的画像……使您领略到阅读文学作品时极少见的体验……拉马努金的故事是一个寓言的材料……不可不读。

——《洛杉矶时报图书评论》

至今出版过的关于当代数学家的传记中，这是最好的，文献最丰富的作品之一。……您定会发现，对本世纪最杰出、谜一般的智者之一的光辉的研究会俘虏了您。

——马丁·加德纳(Martin Gardner)

发人深省……一个具有魔力的、悲剧式的丑小鸭的故事……这就是拉马努金的引人注目的故事。

——《纽约时报》

令人着迷……我所见过的最好的科学传记。

——约翰·格里宾博士(Dr. John Gribbin)，  
《寻找薛定谔之猫》一书作者

《知无涯者》讲述了一个未为人知的天才的困境……这个与数学交往的浪漫故事读来十分生动……结局令人心碎。

——《基督教科学箴言报》

一本写得极好的传记……卡尼格尔的成功不仅在于他写出了作为数学家的拉马努金的品位，他的特别的胜利还在于他讲了一个神奇的充满人性的故事……读起来令人愉快……《知无涯者》是对一个非凡生命的深思，动人心弦的叙述。

——《科学》

故事简单但娓娓动听……卡尼格尔的讲述对外行读者和学者读者都有感染力，他在这方面做得十分出色。

——《旧金山记事报》

卡尼格尔有一种神奇的才能……拉马努金戏剧性的“春天”和“秋天”都写得十分壮观。

——弗里曼·戴森(Freeman Dyson)，  
《宇宙波澜》一书作者

# 致 谢

我 在写作拉马努金(Ramanujan)的生平时,必然面对的障碍是:两种外国文化、一种极具诱惑力的宗教信仰以及时空跨度。有许多人帮助我克服了这些障碍——他们接受了我的采访,花很多时间为我讲解艰深的数学知识;他们给我介绍印度的文化、习俗;他们给我指点图书馆和档案馆的有关信息,给我阅读和评介早期的稿件。无论在英国还是在印度,都对我以朋友相待。在我回到巴尔的摩后,仍得到有力的支持和建议。而我,在很多时候却只能简单地道一声“谢谢”来表达我的感激之情,对此我一直深感不安。

[以下是作者致谢的冗长名单,此处从略。——  
译者]

以下机构和个人慨允我使用他们掌管的资料,谨在此深表谢意:剑桥大学三一学院的学者们允许使用三一图书馆收藏的有关拉马努金和哈代(G. H. Hardy)的文件;圣凯瑟琳学校提供了1933年校刊上哈代的诗;雷丁大学档案馆提供了内维尔(E. H. Neville)的手稿;戴森(Freeman Dyson)提供了他给斯

诺(C. P. Snow)的信;剑桥大学出版社慨允引用其1940年版的哈代著作《一个数学家的自白》;剑桥大学图书馆理事会允许使用该馆所藏关于拉马努金的文件。书中如有因作者疏忽而未经许诺引用了某些具有版权的资料,敬请有关人士致函出版社,并附以适当文件加以确认,本书将在以后各版中改正。

# 目录

## 引言 / 1

## 第一章 寺院里的清凉

(1887~1903) / 11

- 1 南方的恒河 / 11
- 2 萨兰伽帕尼·三尼第大街 / 13
- 3 婆罗门的童年时期 / 23
- 4 成绩高得离谱 / 27
- 5 纳马卡尔的女神 / 32

## 第二章 遍尝欢乐

(1903~1908) / 43

- 1 长尔的书 / 43
- 2 南印度的倒桥 / 50
- 3 离家出走 / 53
- 4 再试一次 / 57
- 5 数学笔记 / 63
- 6 神的旨意 / 71
- 7 适可而止 / 75

### 第三章 寻求赞助人

(1908—1913)/77

- 1 佳娜琪 / 77
- 2 沿门挨户自我推销 / 81
- 3 在马德拉斯的“闲暇” / 90
- 4 稽各布·伯努利和伯努利数 / 95
- 5 遗务信托处 / 103
- 6 英国统治 / 109
- 7 寄往英国的一封信 / 114

### 第四章 哈代

(G·H·哈代—1913)/119

- 1 永葆青春 / 119
- 2 踏铁巷 / 123
- 3 固若金汤 / 131

### 4 三一学院的研究员 / 138

### 5 “令人着魔的气氛” / 149

### 6 哈代学派 / 160

### 第五章 “谨自我介绍如下”

(1913—1914)/175

- 1 信件 / 175
- 2 我得到了一个朋友 / 190
- 3 “拉马努金懂波兰文吗？” / 198
- 4 纳马卡尔之梦 / 203
- 5 在码头上 / 215

### 第六章 拉马努金的春天

(1914—1916)/219

- 1 走出印度 / 219
- 2 相聚在剑桥 / 226
- 3 卢万大火 / 236
- 4 Ζ 函数的零点 / 241
- 5 文学士拉马努金 / 254

### 第七章 英国的严寒

(1916—1918)/265

- 1 高桌子 / 265

## 第八章 “健康状况尚好”

(1918以后) / 347

· 1 “整个世界好像都年轻了” / 347

2 回到高韦里河 / 354

3 最后的问题 / 363

4 印度之子 / 371

5 拉马努金的重生 / 385

6 更好的高炉? / 392

7 白生 / 400

尾声 / 409

注释 / 425

参考文献 / 487  
译后记 / 499

- 2 一个印度人在英国 / 270
- 3 “一次特别愉快的合作” / 276
- 4 无底洞 / 284
- 5 “我们这些大轮船” / 290
- 6 丹麦现象 / 295
- 7 家里出了问题 / 305
- 8 纳尔逊纪念碑 / 310
- 9 拉马努金、数学和神 / 314
- 10 在  $x=1$  处的奇点 / 325
- 11 从记忆中溜掉了 / 338

## 引　　言

1913年夏季的一天，一位年方二十，来自加尔各答某古老望族的孟加拉青年马哈拉诺比斯(Prasanta Chandra Mahalanobis)，站在国王学院的小教堂前。这里是英格兰颇具中古之风的大学城剑桥。自1446年起，历经三代国王的经营，庭园宏伟壮观，不亚于大主教教堂。刻有凹槽的石柱指天而立，支撑着拱形圆顶。朝南一片墙上的镶花玻璃窗将阳光反射得洒遍屋顶。

这一切深深地迷住了马哈拉诺比斯。他乘船由印度来，计划在伦敦求学，刚下船不久就坐火车来这里观光。他留连忘返，结果未赶上回伦敦的最后一班车，便暂住在朋友家里。他一直不停地谈那小教堂如何如何富丽堂皇，又说他如何地深受感动等等。

朋友建议他干脆忘掉伦敦，来就读国王学院。马哈拉诺比斯要听的正是这句话。第二天他就去见院长，不几天就成了剑桥大学国王学院的学生，这使他又惊又喜。在剑桥住了6个月后，他的数学辅导教师问他：“碰到那位了不起的贵国同胞拉马努金(Ramanujan)了吗？”

他听人讲起过，但还没有碰过面。拉马努金是位自修而成的数学奇才，来自南印度马德拉斯城外的一个小镇。与马哈拉诺比斯所熟知且讲究时尚的加尔各答相距上千英里。那里和自己家乡之间的差异之大，正像自己家乡和伦敦的差异一样。在教育程度较高的北印度人眼中，南印度是个落后迷

信的地区，全未受到孟买和加尔各答等大城市的理性启蒙。可是，就在这么一个地方，从一个贫穷的家庭出现了这么一个天才横溢的数学家，让英国把他请到剑桥来，和三一学院的学者们分享他的才华，同时也让他跟他们学点东西。

剑桥大学的各个学院中，三一学院最大而且历史传统也最显赫。帝王、诗人和天才层出不穷。牛顿(Isaac Newton)就在这里读过书。从1755年起，他的大理石雕像——手持用于探索光的多色性质的三棱镜——一直站在小教堂前。拜伦(Byron)也在这里逗留过。还有诗人和作家丁尼生(Tennyson)、萨克雷(Thackeray)和菲茨杰拉德(Fitzgerald)，历史学家麦考利(Macaulay)，物理学家卢瑟福(Rutherford)，哲学家罗素(Russell)，<sup>2</sup>外加五位英国首相。

如今拉马努金也在三一学院。

不久之后，马哈拉诺比斯终于见到了他，而且渐渐成为密友。两人经常在星期天早餐后散步很长一段时间，谈人生、谈哲学，谈数学。马哈拉诺比斯事后回忆这段往事时，认为他们友谊的萌芽开始于拉马努金抵英那年的秋天。他到惠威尔庭院(Whewell's Court)的宿舍去看拉马努金。这是一座类似四合院的三层楼房，中间一块草地。哥特式窗，每隔一段有楼梯通往楼上的房间。拉马努金的房间在底楼，离院子只有两步。

那时剑桥已经开始转凉。马哈拉诺比斯进屋时看见拉马努金正坐在火炉旁边取暖，他的脸胖胖的，略有麻瘢。这就是

\* 丁尼生(Alfred Tennyson, 1809~1892)，英国杰出诗人；萨克雷(William Makepeace Thackeray, 1811~1863)，作家；菲茨杰拉德(Edward Fitzgerald, 1809~1883)，作家；麦考利(Thomas Babington Macaulay, 1800~1859)，历史学家；卢瑟福(Ernest Rutherford, 1871~1937)，物理学家；罗素(Bertrand Russell, 1872~1970)，哲学家——译者

全印度引以为荣的那个人，他就在这里。英国真是费了好大的劲才把他请到剑桥。可是好事多磨，就在这 1914 年的多事之秋欧战爆发。三一学院的内维尔庭院(Nevile's Court)——这是著名建筑师雷恩爵士(Sir Christopher Wren)留给剑桥的永恒纪念——改成临时医院。成千的人去从军，剑桥几成空城。而且，天又冷。

“晚上够暖和吗？”马哈拉诺比斯问道，眼见拉马努金瑟缩地坐在火炉旁。“不够暖。”来自四季温暖的马德拉斯的天才数学家回答说。每晚他穿着大衣睡觉，还裹着围巾。马哈拉诺比斯以为他的毯子不够，便到火炉对面睡觉的地方去查看。床单很乱，好像拉马努金刚刚下床似的。可是毯子动也没动，整整齐齐地平铺在床上。

没错，毯子足够了，可是拉马努金不会用。于是客人便亲切地、很有耐心地教他怎样把毯子向后拉开，再让身体伸进去……

因为战事，拉马努金一连 5 年与印度隔离。独居异乡，住在冷冰冰的英国。这 5 年里他写出了 21 篇分量很重的论文，给世间留下永存的数学遗产。此后他终于衣锦荣归，受到英雄似的接待后与世永别。

后来一位英国人提到他时曾说“斯里尼瓦萨·拉马努金(Srinivasa Ramanujan)是如此伟大的数学家，让他人无法嫉妒。他是这一千年里印度最伟大的数学家”。他那敏锐的直觉，使他去世后七八十年的当代数学家们仍感到无法捉摸。他的著作至今仍被不断地深入研讨。他的理论被应用在很多方面——高分子化学、计算机，甚至(有人建议)癌症，这些都是在他生前无法想像的。因此有一个挥之不去的问题：如果他被早发现几年，或者再多活几年，情况将会如何？

拉马努金平易近人，自奉甚俭。他的举止和他的幽默感也都朴实无华。他不是只知道钻牛角尖的白痴，除了数学之外，各方面都有所知。他执著、勤奋，甚至可以说很有魅力。可是在剑桥、加尔各答或孟买人的眼里，他是一个极为刻板的憨汉。马哈拉诺比斯教他如何盖被子这件小事便让他“感激涕零”。任何一点小差错，他都引以为耻。他的书信中，除了数学内容，几乎毫无文采可言。

我想借本书叙述拉马努金的故事，一位心地单纯却又无法揣摩的智者的故事。

这是印度文化和西方文化之间冲突的故事——拉马努金的成长地，南印度贡伯戈纳姆(Kumbakonam)市的萨兰伽帕尼·三尼第街(Sarangapani Sannidhi Street)，与耀眼的剑桥之间的冲突故事，也是西方数学传统的无懈可击的证明与强烈而神秘的直觉之间的冲突故事。拉马努金的这种直觉使东西方人都为之惊异。

这是一个人的故事，他对自己的才能有极强的信心。但是这个故事的结论并不是天才一定会出头——当然拉马努金最终是出人头地了。但是好些事几乎没有循理发生，如果不是他如此坚持到底，或是运气稍有不顺，他就会终生默默无闻，这是可以肯定的。所以，这也可以说是关于社会制度和教育制度的故事，关于它们所产生的影响，关于它们既可以造就天才也可以毁掉奇才的故事。由他的故事，我们不能不问，在今日的印度还有多少未为人知或尚未被发掘的拉马努金？甚至就是在英美国家，因为种族或经济隔离而生活在夹缝里的人，有多少根本不了解身外的世界是什么样子？

这个故事也是在问你，当发现了一位奇才之后，该怎样做。拉马努金是被一位英国的数学家带到剑桥的，他曾去函请求这位数学家相助。这就是风度翩翩，学术威望无人能比

的哈代(G. H. Hardy)。哈代看出拉马努金是一朵奇葩,但是如果把他在印度时从未接触过的数学细节填鸭式地灌输给他,不论方法是何等有系统,他也是一定不能忍受的。“我怕,”哈代写道,“如果我一味坚持,叫他做他不愿做的事,这会毁掉他的自信心,也会窒息他的灵感。”

拉马努金在成长时期一直向石雕的神像祈祷,而且一生中一向听命于家里最崇拜的一位女神,并宣称他的数学洞察力全来自这位女神。他的许多定理,虽极尽人类智慧也难以证明,但他都证明出来了——可是好多数学家仍然想不透怎么会有人想得出这样的定理。本书探讨了一个非同寻常的心灵,它一张一弛之间闪烁出无穷的创新力、直觉和智慧。

和许多书一样,本书开始只是起于一念,可惜,它不是我自己的主意。它是巴巴拉·格罗斯曼(Barbara Grossman)的主意。那时她是克朗出版社(Crown Publishers)的资深编辑,如今在斯克里布纳斯出版社(Scribners)工作。巴巴拉第一次得知拉马努金的名字是在1987年。那一年英国、美国和印度的报章杂志全都刊载着纪念拉马努金百年冥寿的文章。巴巴拉的心情宛如马哈拉诺比斯站在国王学院的小教堂前时那样着迷。她首先关心的是,他那非凡的一生这么短暂——其生平充满了那些故事;继而又想到,在他去世后这么多年,在这电脑时代,为什么他的一些定理,正如她后来所描写的:“又活生生地从历史中被揪了出来。”

当我的经纪人比竹(Vicky Bijur)告诉我说,巴巴拉有意出一本关于此人的传记时,我问道:“谁是拉马努金?”我虽然心存疑窦,也还是对他的生平做了一点探讨,主要是根据印度作家为他写的传。看得越多,自己也越被他的魅力所震撼。这是一个从赤贫转为智慧富豪的故事。正如一位英国数学家威

尔逊(B. M. Wilson)在20世纪30年代所写的：“他的一些生平轶事真可以由一位电影脚本作家几乎原封不动地写成剧本。”我的疑虑开始消失，想到有如此的机会来研讨这一代奇才的生平，兴奋之情油然而生。

不久前，我看了一部谈拉马努金生平的短片，它由英国制片家赛克斯(Christopher Sykes)摄制，并由英国广播公司(BBC)发行。片名是《来自印度一位小职员的信》。赛克斯很有技巧地把拉马努金的生平浓缩在一个小时的短片里。看完之后我对哈代也极为赞赏，他是拉马努金函请援助的第三位，其他两位都没有帮忙。哈代不但马上看出拉马努金的才华，而且费了九牛二虎之力把他弄到英国。让他学习以前没有学到的数学，最后让他得到全世界的认同。

### 为什么是哈代？

完全凭他数学上那种明察秋毫的敏锐吗？恐怕未必。其他两位在数学上的成就也都很不错。这一定有他秉性上的某种异常之处，不完全与知识有关——可能是他特有的开朗，愿意打破生活的常规，同时敢于将自己的声誉在一位从未谋面的陌生人身上下赌注。

我后来知道，哈代行止怪异，是个很令人着迷的人物：他是个板球迷，写一手好散文，长得很英俊。可是他却以为自己长得很丑，连镜子都不肯照。这位英国大数学家，数学界的奇才，在他开始和拉马努金交往时，自己正在他专长的一行里推行革命性的改革，影响及于好几代后继者。

哈代慧眼识人，能在褴褛的外表之下看出这位天才，当然值得人们赞扬。人们也会同意世界因此获益匪浅。但是我认为哈代自己也大有收获。他和拉马努金共处的这段日子，被他称为“生平一大乐事”，也改变了他的一生。所以这是两个人的故事，这两个人是天造地设的。

我不得不再说一点，明知道加上这一点会引起某些人的反感。哈特利(L. P. Hartley)说过，过去也是一个奇境。对美国人来说，印度和剑桥真正是异邦，“那里的人做事的方式不同”。我们的故事开始于20世纪初，那时印度仍然是英国殖民地而维多利亚仍然是女王，所以故事可以说是对异时异地的探索。除了时间地点不同之外，我还要加上第三点：拉马努金和哈代终生从事的数学，不论是单独还是共同研究的，对于我们同样也是生疏的“异邦”。

最难抗拒的念头是只想描述拉马努金奇特多彩的一生，而对他的数学完全不提。事实上，很多写拉马努金的人都把他的生平和工作分开。现有的传记中，好些完全不提数学，有些就只在书后加个附录。至于专门讨论他的数学的学者们的论文，则总是寥寥数语算是交代了他的生平。

假如我们对拉马努金为之活了一生，而又情有独钟的数学毫无所知，那么对他的为人处事又能了解多少？正好像对一位艺术家的作品或对一位哲学家的理念毫无所知，则对这位艺术家或哲学家又能了解多少？

要谈数学，我心里明白，对一般的读者（以及作者本人）而言可能是一种负担。艺术至少看得见；哲学或文学，固然十分深奥，总可以用文字表述。数学则不然，它用的词汇和符号大多数人都不熟悉，所涉及的园地，从至小到至大，皆非通常的语言所能描述。如今数学分得如此之细，有人告诉我，刊登在绝大多数数学刊物里的绝大多数数学文章，绝大多数数学家都看不懂。宾夕法尼亚州立大学有一位安德鲁斯(George Andrews)发现了一件长年被遗忘的拉马努金在三一学院的手稿。他就说过，这份手稿，只有在这个数学分支中已经是专家的数学家才能识别——仅有博士学位的职业数学家是不足以胜任的。

一般读者对拉马努金的数学问题又能领会多少呢？

几乎全然不知。拿起一份数学杂志来，读到拉马努金对某个定理的证明，一连 20 多页全是画符似的符号——特别是拉马努金式的写法更是如此。他经常将十几步的证明缩短成一两步，跳过去的相互联系要读者自己去找。但是，如果只想体会一下他的成果的风味，领略一下他工作的心路历程，或是历史的根源，则又如何呢？这倒不太难以克服，至少不比追究哲理的辩论，或文学的笺注更难。

从某一个角度来看，拉马努金的数学要比数学的其他分支较为容易接近。因为他所研究的，一大部分可以归在数论之下，讨论的是普通数的特性和形态。这些数都是我们日常生活中看得到的，诸如 8, 19, 376 等等，比起夸克、类星体及磷酸肌酸等等常见得多。拉马努金使用一些极微妙和强有力数学工具处理问题，轻而易举地就把问题公式化了。

在“致谢”部分，我将写书过程中给予我帮助的所有朋友一一列出姓名。<sup>\*</sup>但是在这一部分我要特别感谢作为一个整体的南印度人，他们使我在那里度过了一段非常满意的日子里。

我在南印度一共过了五个星期，走遍拉马努金一生所去过的地方。坐火车、乘汽车，逛庙宇，用手抓芭蕉叶上的东西吃。在贡伯戈纳姆的大街上被牛从后面撞过来，在戈杜穆地 (Kodumudi) 跟壁虎同居一室。我走访了拉马努金出生的城市埃罗德 (Erode)；我参观了他住在那里渐渐长大的房屋；在他的母校做晨操；也去赏游过他一生的转折时期曾去过的纳马卡尔 (Namakkal) 庙。最后我去看了他在马德拉斯逝世时的房间。当地的印度人请我去他们的家，用种种方式招待我。人

\* 中译本致谢名录从略。——译者

力车夫、机器脚踏车车夫，不辞辛劳地将我带到偏远的地方去。每当我用糟透了的发音讲南印度的地名时，他们很难弄清楚我讲的究竟是什么。他们瞪眼看着我的白皮肤，但总是对我非常和善有礼。

和这些南印度人共同度过一段日子之后，难免不感到自己灵性的提升，对他们的内心世界有了更高的崇敬，隐约地对西方的生活方式和价值观有了疑问。几百年来，西方的艺术家一直希望将他们的宗教感受表达出来，所以有了巴赫的赋格曲、哥特式教堂，来仰赞神祇并歌颂神祇的美德。今日的南印度，宗教崇拜的浓厚气氛仍然弥漫各处，与在世俗的西方相比，似乎更容易引起对拉马努金数学的精神共鸣。

拉马努金心目中的英雄哈代，是一个坚定的无神论者，但是在他去世时，一位吊唁者曾写道：

他有极深厚的信念，认为数学的真理描述出一个清晰明亮的宇宙。其结构如此精致美观，与它相比之下，物理世界就显得既污秽又紊乱。正由于这一点，使他的朋友们……认为他对数学所持的态度，本质上是一种属于精神世界的近乎宗教信仰的东西。

对拉马努金而言，上述情况可谓有过之而无不及。他终生信奉神祇，将这无边无涯的大千世界作为他数学上和精神上的家园。他曾说过：“一个方程如果不能表达神的旨意，对我而言就完全没有意义。”

1990年5月于巴尔的摩

# 第一章

## 寺院里的清凉

(1887 ~ 1903)

### 1. 南方的恒河

他一辈子都听到这个声音——节奏缓慢的突…突…突……这是在高韦里河(Cauvery River)突出的石块上捶衣服的声音。他几乎是在河边出生的，自婴儿时期起，拉马努金就听见这个声音。长大之后，他到河边去取水，在河里洗澡，放学后在河边的沙地上玩，都听到这个声音。后来，他由国外回乡，生病，发烧，直到去世之前，都听到这有韵律的拍打声。

高韦里河时时在拉马努金的生活中出现。岸边的棕榈树，结满了果实的枝干搔首弄姿地向下弯。有些地方绿叶成阴，树根像蛇一般沿着河岸爬。雨季里河水上涨 10 英尺(约 3 米)、15 英尺(约 4.5 米)甚至 20 英尺(约 6 米)，在河边吃草的牛都会被淹死。旱季到来，汹涌的流水只堪追忆，河岸成了沙滩，只剩下最深的地方还有潺潺细流。

但是高韦里河水长流。发源地在西边 500 多英里(800 多千米)外的古尔格山脉(Coorg Mountains)中。流经半岛时一再分支，河流上的水坝及运河有些是在 1500 多年前修建的。它把所经之地处处染成一片葱绿，使人难以忘怀。拉马努金的家乡如此美丽，这是最主要的原因。

拉马努金的故乡贡伯戈纳姆被高韦里河及另一支流所围

绕，在印度南部的腹地，马德拉斯之南约 160 英里（约 260 千米）。那地区当时称之为坦焦尔（Tanjore），其一半的面积，约 3700 平方英里（约 9600 平方千米），相当于美国特拉华州那么大，都靠这条河灌溉。河水以每英里下降 3 英尺（约每千米下降 0.6 米）的落差缓缓流入大海，在三角洲留下肥沃的冲积土。

高韦里河赐给当地居民无尽的福祉。1853 年洪水暴涨，淹没了整个三角洲，造成很大的灾害，不过伤亡不多。印度每年的雨季变化很大，使印度受灾匪浅。亏得有这条大河，让其流域未受到太大的影响。1877 年，因为一连两年雨季无雨，南印度发生大旱灾，死亡者数以千计。但是坦焦尔区有这条河水的保障而免去一劫。另一方面，因为荒年粮价高涨，又给这个地区带来空前的繁荣。

故而和北方 1000 英里（约 1600 千米）以外的恒河一样，高韦里河也被看作是圣河之一。根据印度的神话，有一个名为卡维拉·牟尼（Kavera-muni）的凡人娶了大神梵天的一个女儿，她为了尽孝，将自己变成一条河，用这条河的水来涤尽人类的罪恶。甚至有的传言说，恒河这条圣河有时在地下某处和高韦里河相会，以便将被罪人沐浴污染的水荡清。

高韦里河因此被称为南方恒河（Dakshin Gange）——南印度的恒河。出海口的三角洲是南印度人口最稠密也最富庶的地方。整个地区的生活结构，它物质上的财富以及由之滋养的精神财富全都仗着高韦里河的水，它涤荡精神上的污垢，满足农业上无尽的需求。每天早上沐浴，白天取水，身缠白色腰带包着头巾的男人带了牲口在浅处饮水；妇女们站在水深及膝的河里，衣上的丝带或棉带好似水蛇般地在身后飘摇，拿出一堆堆湿衣服在河边的石头上捶打。

## 2. 萨兰伽帕尼·三尼第大街

1887年9月，贡伯戈纳姆有一位19岁的女孩子名叫柯马拉塔马尔(Komalatammal)，在她临产前两个月，逆流而上150英里(约240千米)，回到埃罗德她娘家生孩子。女人回到娘家生头胎是人人遵行的传统。负责人口统计的官员都要协助她们这样做。

小镇埃罗德约有15 000居民，在高韦里河和另一支流珀瓦尼河(Bhavani River)的汇合处，在马德拉斯西南250英里(约400千米)左右。按照印度的古代神话，湿婆神发怒砍断了梵天五个头中的一个，埃罗德这个字的原意是“湿头”就是从这个传说而来的。在这一带高韦里河的河面很宽，河床上有很多大石块伸出来。离河不远的“城堡”，就是古时人们做生意的地方，旁边的特普苦兰(Teppukulam)街上有一间小房子，那就是柯马拉塔马尔父亲的家。

1887年12月22日，星期四，按印度历法是末迦始罗(Margasirsha)月的第九天，她给她的丈夫斯里尼瓦萨生了一个儿子。第11天，便照传统的习俗给婴孩取了名字。满周岁之后，斯里尼瓦萨·拉马努金·耶恩伽尔便随着母亲回到贡伯戈纳姆，此后的20年就是在这里度过的。

斯里尼瓦萨(Srinivasa)的第一个音节读如“斯里”。这是他父亲的名字，他承袭而来却不大用，只有在正式文件上签字时用它的第一个字母S。耶恩伽尔(Iyengar)是用来表示种性的名字，说明他和他的家族属于婆罗门种姓。因此三个名字中，一个是他父亲的，一个是种姓，只有拉马努金是他自己的名字。后来他常常向西方朋友解释他是没有姓的。他母亲就叫他Chinnaswami，意为“小主子”。对其他的人来说，他的全名就是拉马努金。

印度教吠舍教派有一个圣人名叫 Ramanuja(汉译为罗摩努阁), 生活于公元 1100 年前后。他所宣讲的教义给日渐式微的印度教打了一剂强心针。他的生日也是星期四, 而且还有其他星相上类似的地方, 所以这位“小主子”也以 Ramanujan 为名字。这个名字在“ma”上略带重音, 最后一个音节有时比较接近于“juṇ”。整个名字有罗摩(Rama)之“弟”(anuja)的意思。罗摩是印度人心目中的模范, 这个名字一直在印度的史诗《罗摩衍那》(Ramayana)里流传至今。

拉马努金的母亲柯马拉塔马尔在附近的寺庙里唱印度教的圣歌, 募到的钱一半归庙堂, 一半归歌手。她的丈夫一个月不过赚 20 几个卢比, 所以她所赚的 5 个到 10 个卢比不无小补, 因此从来不缺席。

1889 年的 12 月, 她竟然一连缺席了四五次。于是有一天, 歌唱团的领班到她家看看是怎么一回事。

她看到大门口堆了一大堆麻果杉树的树叶。很显然是有人出天花。进屋之后, 她看见一个暗黑的小小身影睡在麻果杉叶堆上, 母亲坐在旁边哼着小曲, 一面用麻果杉叶蘸着姜黄粉水洗涤两岁的拉马努金那长满天花的身体——南印度的草医相信, 这既可以止痒又可以退烧。

拉马努金自幼留下的天花瘢痕一生都没有褪掉。幸运的是他活了下来。在坦焦尔区, 也正好是在他成长的那段时期, 天花流行带走了 4000 多条人命。打过预防针的人不到五分之一。拉马努金 10 岁那年流行霍乱, 死者达 15 000 人之多。每十个婴儿中, 总有三四个活不过周岁。

这些统计数字也反映在拉马努金的家里。在他一岁半的时候, 母亲又生了个弟弟, 名叫萨达果潘(Sadagopan), 只不过活了三个月。

拉马努金 4 岁时,1891 年 11 月,他有了个妹妹。第二年的 2 月就去世了。

当拉马努金六岁半时,母亲又生了塞山(Seshan)——没过年就死了。

很久之后,有两个弟弟留了下来,一个叫拉克希米·纳拉辛汗(Lakshmi Narasimhan),是 1898 年拉马努金 10 岁时出生的,另一个叫蒂鲁纳拉亚南(Tirunarayanan),是在他 17 岁时出生的。可能是早年他那些小弟小妹留不下来,养成他有特别受宠的独生子的习性。

拉马努金 7 岁时,他那受尽麻风折磨的祖父去世。他也开始有长疖子发痒的征兆。不过,这并不是他后来爱发脾气和喜怒无常的最初征兆。他很敏感、很固执,而且——如果这个常用在成人身上的字眼也可以用在小孩身上的话——有怪癖。当他还是个婴孩住在埃罗德的时候,就只在庙里才肯吃东西。后来在贡伯戈纳姆时,他常常把家里的铜盆铁锅一个个沿墙摆开。而且他如果没有吃到爱吃的东西,就在烂泥里打滚发脾气。

拉马努金 3 岁时仍然极少讲话。大家以为他是个倔强的孩子,所以认为他是故意不肯说话。那时候的习俗,年轻母亲常常在婆家和娘家之间往来住去。柯马拉塔马尔生怕她的儿子是哑巴,便带拉马努金去看那时住在甘吉布勒姆(Kanchipuram)的外祖父。这里离马德拉斯不远。在她父亲的一位老友的鼓励和怂恿之下,叫他做一种祭祀活动:在地板上铺一层厚厚的米,外祖父拿住他的手,一面将经文读出声,一面用手指在米上用泰米尔文把经文写出来。

不久之后,对拉马努金可能聋哑的疑虑渐渐消失。于是他开始学泰米尔文字母里的 12 个母音,18 个子音以及子音和母音的 216 种配合。1892 年 10 月 1 日是传统的开学日,称为 Vijayadasami,他报名进了当地的学校,入学时要唱吠陀的

颂歌。学校叫做 pial(前廊),实际上就是南印度许多人家门前的走廊。每个 pial 学校只有一个老师,六七个学生。

5 岁的拉马努金不喜欢他的老师,上课时总是反抗。他自小就很任性,除了依他选的时间里做他自己爱做的事之外,他什么都不肯做也不会做。对他来说,学校不是启蒙的地方而是他竭力想摆脱的锁链。

拉马努金生性安静又爱思考,常常提些问题,例如谁是这世界里的第一个人?两朵云之间有多远?他爱独处,这也是他父母惯坏的。一有朋友来,母亲总叫他不要出去,他就隔着临街的窗口和他们谈话。他对运动毫无兴趣。在他那时的天地里,胖子是个从来没听见过的名词。人和家畜都是骨瘦如柴,可是他,从小时候起一直到后来都相当胖。他常说——不管是吹牛、开玩笑抑或是悔恨——假如他跟别的小孩打架,只要压住就能把别的小孩压得粉碎。

接着的两年里,拉马努金一直转学,从 1894 年的 3 月开始,那时他还住在外公外婆甘吉布勒姆的家里,他在一间学校里读了很短的一段时间。那个学校不是用泰米尔语教学,而是用与之相近却又全然不同的泰卢固语。在这里他常常受到处罚,叫他抱臂而坐,同时一根手指放在唇前做禁声的手势。有时他就气呼呼地跑出教室。

他的外祖父为了一件贷款纠纷而辞掉工作,离开了甘吉布勒姆。拉马努金跟着母亲回到贡伯戈纳姆,在那里他进了坎伽扬小学(Kangayan Primary School)。当祖父去世之后,就和外公外婆同住在马德拉斯。他又千方百计逃学,家里竟然要找警察把他捉回学校去。

1895 年,拉马努金在马德拉斯住了很痛苦的六个月之后再一次回到贡伯戈纳姆。

高韦里河及它的支流阿拉萨拉河(Arasalar River)围着贡伯戈纳姆流过,所以城里的大街有些是顺着河的方向走,有些街道垂直地一直通到河岸,这样城里的街道便构成相当有规则的网格。萨兰伽帕尼·三尼第街就在这个紧密的网格中间,肮脏的路面宽约30英尺(约10米),两旁挤着许多矮小的房屋,拉马努金的家也在里面。

那是一座平房,棕榈树叶盖的房顶,离大街约10英尺(约3米)。一条有双层顶的前廊高出满是灰沙(或泥泞)的街面一两步台阶,再上几步台阶便到了门口。面对大街刷有泥灰的墙宽约12英尺(约3.6米),窗户在左边,大门在右边。站在街上可以从大门口看穿阴暗的内房,一直看到后院的亮光。稍稍偏左是他起居的地方,再后面便是厨房,长年不断的烹饪气味闻起来很香。

南印度虽不长年炎热,却从来不冷。位于北纬11度,贡伯戈纳姆算是在热带地区;正月的冬夜,平均气温可能降到70°F(约21℃)左右。气候如此,房屋的建造也要适应。南印度地区的房屋都比较通风,室内室外相通(感觉就像装了纱门)。窗户是有的,那只是墙上开的洞口而已,加了铁栏杆或挡风板,很少用玻璃让你有里外之分。房子的正中央多半有个天井——好像是没有玻璃的天窗,积在院子里的雨水顺着排水沟流出去。拉马努金的家,外面的气味也飘进屋来。屋里很多壁虎爬来爬去,蚊子挥之不去。南印度柔和的空气,带有玫瑰香气,也夹着拜神烧香的气味,当作燃料用的牛粪味则到处都是。

大门外就是贡伯戈纳姆市,它曾是朱罗王朝(Chola Empire)的首都。公元1000年前后,是朱罗王朝的鼎盛时期。当时全欧洲正处在黑暗时期,朱罗王朝统治印度及锡兰<sup>1</sup>北部,

<sup>1</sup> 锡兰,1972年后国名改为斯里兰卡。——译者

后来拉马努金时代称为马德拉斯土邦(加上孟买和加尔各答构成英属印度的主要行政区)。这里的十几座大型庙宇,从那时起便将很多南印度人吸引到贡伯戈纳姆来进香。

每 12 年,约在二三月时,进香客便来度玛哈玛汗(Mahamakham)节,纪念洪水期后发生的一件大事:据说开天辟地的种子在一个圣罐里顺流而下。这个圣罐叫贡伯(kuntha)——城市的名字也就由此而起——它被湿婆的箭射穿,种子里的蜜流了出来,正好流到玛哈玛汗的“水池”里。每座寺院都有这样的户外水池,专门给香客盥洗净身之用。那时,和 1897 年拉马努金 9 岁那年一样,香客约有 75 万人之多。一个占地 20 多亩的水池,四周围绕着许多大厅堂,池里的香客们使水面升高了好几英寸。

寺院里的水池在没有香客的时候,看不出与修身拜神有什么关系。它大都是露天的,四周砌着大石板。有时还养着鱼,水藻漂浮水面成一片绿色,反而是生蚊子的好地方。贡伯戈纳姆夹在两条河之间的低洼地,所以水质很坏,素以蚊子和丝虫病——这是蚊子所传染的疾病——著称。丝虫病患者的四肢会有极可怕的畸形,有时阴囊会长得如篮球那么大。拉马努金 6 岁那年,城里修了排水系统,但是只能排除地面上的积水,是不完全的下水道,所以城里的健康问题毫无改善。

马德拉斯在贡伯戈纳姆之北约 200 英里(约 320 千米),乘火车约需一日,是与它最接近的大都市。贡伯戈纳姆的医院只有 72 个病床,有 4 个警察分所,2 所英文初中,只有 3 个班用泰米尔语教学。另外有 1 所名声很好的高中和 1 所学院。拉马努金在那里的时候居民超过 5 万人,可以算是一个相当大的城镇了。实际上是马德拉斯土邦的第六大城镇。

城郊以及四周是全印度最富庶的农田。三分之二的人口从事农耕,包括那些专事农耕的整个种姓,如 Paraiyans 和 Pal-

lans。农民每天只能赚几个印度安那<sup>\*</sup>。高韦里河带到三角洲的淤泥可以省掉昂贵的肥料。河边的土地，每年雨季都浸在饱含淤泥的河水下，更是肥沃。可以种竹子、烟草和香蕉。三角洲其他的可耕地四分之三以上的面积都是种稻米。

南印度很多地区的土地，一年里有大半的时间呈惨暗的棕黄色。只有这里——在高韦里河的两岸处处翠绿而且深浅各不相同。农民在一块小小的水田里培植秧苗，看上去是突现于周围田地中的一片绿油油的颜色。三四十天之后，稻秧长好了，农民便开始在大片的水田里插秧。看上去则是大块的嫩绿色，直到转变成黄色之后，收割的时候就到了。

三角洲上的每一寸土地都被翻耕过，自古以来就是如此。牛羊根本没有吃草的地方，因为土地太珍贵了。树林也不多，偶尔看见一棵椰子树、榕树或无花果树。近海的地方有棕榈树或月桂树。这一县即为一个税区(taluk)共 342 平方英里(约 885 平方千米)，贡伯戈纳姆是主要的城市，一共有 300 多个小村落。一个村落就是夹在稻田中的几户人家，十来间草房，住有上百人。房屋比稻田高出几英尺，多半被椰子树遮蔽着。

拉马努金一家虽然大大得益于这块土地，但是他们并不属于这块土地，他们是城里人。他们算是城里的穷人。他们并不完全只靠栖身的那块地过日子，他们在精神上和心灵上的天地宽阔得多。高韦里河的存在使城里人不必为每天的气候或每季的收成烦心，这条河带给他们一定程度的富足感。拉马努金一家人也分享这种福分。

这里与美国中部富产玉米的艾奥瓦州的得梅因(Des Moines)很相似，贡伯戈纳姆比附近的地方更都市化。那里的

\* 1卢比等于 16 安那——译者

工作要用眼,用手,用脑,要有相当程度的闲暇才能紧随不舍。拉马努金成长的那段时期的人口调查指出,在整个马德拉斯土邦内,除了马德拉斯市之外,就算这里的专业人员最多,特别是手工艺品这一行。例如小五金制品,贡伯戈纳姆大约有600多匠人。欧洲市场里的印度教庙宇的神像模型,不论是紫铜的、银的还是黄铜制的,都由这些匠人供应。

另一个特产是妇女们穿的丝织莎丽(sari)。织机有2000多台而织工则有3000多人。整个南印度,没有任何地方的莎丽能和贡伯戈纳姆及附近的坦焦尔区相比。其颜色鲜艳,金丝银丝间杂的精细织工,每件可以卖到100卢比,好些穷人家一年的收入也不过这么多。

物产丰富使三角洲出现许多富农。富农家的小姐出嫁得购置十几件莎丽。婚礼之前,全家总动员到城里去选购。他们先取货后付账,商人们也都乐意让这些富裕的顾客赊账。不过,通常是男家去选购。一位莎丽织工和店主对当时的英国游客说,男方很担心女方花费太多。

拉马努金出生时,父亲斯里尼瓦萨·耶恩伽尔才24岁,比妻子大5岁,正在某一家卖莎丽的店里做伙计,就像他的父亲库普斯瓦米(Kupuswamy)以前一样。一般讲来,这种工作都是做一辈子的——招待顾客,接订单,做例行的簿记工作,有时出去收账。偶尔老板会收你做小股东,再不然自己出去自立门户。这些都需要有冒险创业的进取心。斯里尼瓦萨对评论织物的品质很在行,老板也相信他的这种本事,可他就是没有出去闯的能耐。

像斯里尼瓦萨这样做伙计的,每天早上8点钟左右就到店里来,天黑之后才回去(因为地居赤道附近,一年之内虽稍有不同,但不到6点不会天黑),有时回家吃中午饭,可是多数情况都是妻子们给他们在一个铁盒子里装点食物就在店里

吃。一年里有几个月被认为是不吉利的，所以婚礼都移到好日子里举行。生意也就有了季节性，很多时间伙计们就无所事事。这些时候，甚至日正当中，斯里尼瓦萨多半在店里打盹。

日复一日，年复一年，他都在店里，拉马努金小时候他很少在身边。印度的社会习俗，在家里做父亲的似乎没有什么要做的，总被看作是高高在上，不可侵犯，不可接近的人物，跟孩子们的关系都很严肃。在家里几乎见不到斯里尼瓦萨，家里的记事流水簿上根本看不见他的名字。“从不开口”，拉马努金一位孩童时期的朋友曾这样说过。别的人则用“毫无分量”来形容他，即令他本性并非如此的话，他也从来不和妻子争着去管儿子的事。

很多年之后，当拉马努金在英国时，写给他父亲的信中最多只谈到房子要修理，不要让屋檐上的雨水槽漏水。但是拉马努金给他母亲的信就会讨论战争给欧洲带来的困难，一直详细讲到参战的将士有多少，战线有多长，用的是什么飞机，以及印度王公们给英国的帮助有多大等等。

他一定知道母亲对战争的细节有兴趣，因为他们彼此之间非常了解，言语相通，彼此相处也十分融洽，对事物有同样强烈的感受。当他小的时候，他们常常一起玩一种称为老虎吃羊的跳棋，用小石子当棋子，棋盘上两组互相垂直的线做棋格。有3只“老虎”想要跳过15只“羊”，把它们吃掉；羊则想把老虎围住，让它们无法动弹。玩这个游戏要会思考，要有战略，要有非赢不可的注意力。他们俩都很着迷这个游戏。

拉马努金长得很像他母亲，根据一项记载，说她是“工于心计且有教养的太太”。她的家族出过精通梵文的学者，受到当地王族的礼遇。她是纳拉亚纳·耶恩伽尔(Narayana Iyengar)的女儿，后者则是当地政法界很有名望的人。他任职地方法

院(职位称为 amin),传唤证人,笔录口供,或与律师沟通等等。拉马努金 4 岁的时候,她父亲因得罪上司丢了差使,便带了他太太兰伽马尔(Rangammal)搬到甘吉布勒姆。这是马德拉斯附近一个庙宇很多的小地方。他就在庙门口开了一间小事务所,替人办理婚娶或上庙进香等杂事。

有一张柯马拉塔马尔 40 岁左右的照片留了下来。她那庞大的身材连 9 码(约 8.2 米)长的莎丽都不能完全遮住。她放在椅臂上的手显出她的安详,身体的其他各处都带着极强的活力。头偏向一边,眼神逼人好似喷火,抿着嘴,坐在椅子里略向前倾,只有脚跟着地。整个的印象是全身有很强的、勉强能被她的身躯包住的那种活力。

她是一位极重感情,而且几乎是一切都要据为已有而毫不让人的妇女。她所喜欢的,她就毫无保留地施之以爱。她一生中心里只有她的“小主子”。在印度,母子之间强烈的关爱只有在故事书里才看得到。但他们之间的爱必然是十分强烈,连为他写传的印度作家们都认为有必要把这种关系写出来。

柯马拉塔马尔亲自喂他酸奶、米饭和用许多香料腌制的水果或蔬菜,给他煮扁豆汤;她替他梳头并依照一般的习俗盘绕成一束,有时还加一朵花;替他缠腰带(dhoti,泰米尔语叫 veshti),这腰带绕着腰裹儿圈之后要从两腿之间拉上来。除了最为西化的人士之外,每个人都是这样打扮的。额头上,她给他画上表示种姓的记号,泰米尔语叫 namam。她带他去上学,出门之前,拉马努金先要碰碰她的脚尖,在印度这是向她表示敬意,同时也是要得到她的保佑。她很注意他交往的朋友,以及他的作息时间。许多事都是她替他决定。有时当她认为拉马努金没有得到合理的待遇时,就会气冲冲地直奔校长室去抱怨。当她认为他该结婚时,就替他找个老婆而且安

排好婚礼。所有这些全用不着先跟她丈夫商量。

她热衷于灵性生活。一般说来，在印度的家庭里，妇女比男人虔诚，也更遵守传统的习俗。她自己的家就是这样，据说她的母亲被催眠后可以和神灵沟通。这种精神也传留到拉马努金的家。柯马拉塔马尔非常虔诚，在家里举行祷告会，在庙宇里唱诗，深信占星术和手相术。家里供的纳马卡尔(Namakkal)的女神娜玛吉利(Namagiri)的名字一直在她口里念个不停。“她是位极有天赋的女士，有通灵的神力和很强的想像力”，这是她家某位老友所下的评语。她知道“很多的神话故事，从古老的摩诃婆罗多和罗摩衍那到比较晚的维克拉马迪蒂亚(Vikramaditya)的故事，她都常常讲给我听”。讲述时偶尔停下来也都是为了要向娜玛吉利祷告几句。

拉马努金从母亲那里吸收了传统的习俗，明白了种姓的教义和适当的举止，学会了唱圣诗，到庙里祈祷和做礼拜。只吃传统认为可以吃的，禁绝不可以碰的——总而言之，学会了该做的和不该做的，以便做一个婆罗门好小孩。

### 3. 婆罗门的童年时期

几千年来，婆罗门一向是学者、教师或印度教义的诠释家。他们把头刮得精光，看起来都是未老先秃；前额的有色种姓印记十分显眼，脑后留一撮头发看起来像一束马尾；袒露的前胸斜绕着编织的白色圣巾。贡伯戈纳姆的大街小巷和庙宇里每天都可以看见这样的人。婆罗门教在这里根深蒂固，传统的印度教里的最高僧侣都是他们。

婆罗门虽然只占南印度总人口的百分之四，可他们是最受尊敬的印度教人物，至少在英国殖民时代之前是如此。富有的教徒们捐给他们田地房产、金银珠宝，藉以涤清自己的罪

恶，从而受到神祇的垂青。他们是庙宇里的僧侣、占星家或宗教领袖以及诠释圣律或吠陀教规的传教士。婚丧喜庆都由他们主持，在印度的种姓系统中，他们占有最高的地位。

那时的英国作家，每当写到印度时，总要大大地夸张印度种姓制度的可怕行径；诸如，对犯罪男女生前罪行的惩罚是重新投生时降低他们的社会地位。共分四个种姓：婆罗门，他们是最高的一层；刹帝利是武士阶级；吠舍是商人；还有首陀罗是劳工。除此之外，即在种姓之外，还有第五群人：不可接触者，就是贱民。前三种种姓的人，衣着上可以有圣巾佩饰以表明他们的“再生”。首陀罗则不可以再生，但是可以进庙宇。不可接触者连庙宇也不准进，不能从村里的水井取水。甚至他们的影子都不可以挡住贵族人的去路，高种姓者一旦碰到这样的事就要去净身。

这种分类所根据的是3世纪传下来的一本梵文法典——《摩奴法典》。但是它在南印度并未严格遵守。在那里，几乎没有刹帝利，而且也没有印度那些由大种姓再分出的成千的自治支派。这些支派里有许多规矩，例如谁和谁可以同桌进餐，谁和谁可以谈婚论嫁等等。绝大多数的规矩有职业性的根源，所以农人、理发匠、织工、木匠都成了种姓下的支派。每个人实际上是属于小支派。同是婆罗门，有的叫Vanniar或Chettiar。拉马努金是一个毗湿奴派，他的名字中的耶恩伽尔就标定他属于这一支派。

在印度教的三大神，即梵天、毗湿奴和湿婆中，毗湿奴派——婆罗门中每四个就有—个是毗湿奴派——特别敬拜毗湿奴。印度教的神学还有许多细微的差别——例如一个信徒要花多少功夫才会得到神的恩赐等等。这些差别大都是南派和北派之间的差别。正如最先有基督教从犹太教分出来，后来清教徒又从天主教分出来，然后有路德会和卫理会之分一

样。和西方国家的宗教一样,这些差别主要表现在仪式上,风格上,祭奠的对象上,或各历史事件在神学里的重要性上。

所有的印度教徒都相信轮回和伽摩,都听过同样的伟大故事,有相同的理性、价值观和信念。但是婆罗门里的毗湿奴派就不能和拜湿婆神的湿婆派论婚嫁。每一个支派有自己的庙宇、神殿和讲解经文的会堂。拉马努金前额上的种姓印记,是一个宽形的 U 字中间画一道红色的直线,和湿婆派的三条白色横线印记分得很清楚。

种姓之间的隔离在用餐时最明显。婆罗门只和婆罗门一起用餐,连一旁伺候的人都必须是婆罗门。城市里的饭馆和酒店如果大厨是婆罗门都会大事宣传。婆罗门出外旅行,一定要不厌其烦地去打听吃的东西是从哪里供应的。走远路的婆罗门进香客,总是停在路旁吃自己带的干粮,免得吃到来路不明的食物。

通常婆罗门家里总是主妇料理饮食并且伺候饭桌。但是男主人从来不和她同桌用餐。英国人则认为下述种种异教徒行为是所有基督教徒所不齿的:女人要准备食物,伺候男人和小孩,为他们的银或铜餐具里添汤加菜(他们不用瓷器,认为瓷器不够干净),四周走动随时服侍。而男人只管吃,好像她们完全不存在似的。吃完之后站起身来一走了之。女人们把餐厅打扫干净,再回到厨房吃剩菜剩饭。

拉马努金吃饭时坐在地板上,面前摆个大圆铜盘。更常见的则是用芭蕉叶盛食物,这些叶子像纸盘一样饭后就丢掉。他直接用手吃,这并不是说他手拿面包蘸汤或舀菜吃。印度北部的主食是面,而南部是米饭,所以他家不大有面包。拉马努金吃饭的习惯和西方国家的小孩所学的正相反——他是用手抓东西吃的。

芭蕉叶的正中间放一瓢饭。叶子的大小好似西方国家餐

桌上的垫子，叶子仍然是青绿色，相当厚，中间有粗大的叶脉。米饭周围放些腌过的水果和蔬菜，比如芒果、洋葱、橘子以及味道很重的香料或调味品等等。此外还有跟马铃薯及酸奶一同炖的扁豆浓汤。通常只有几道菜，但如果有什么节日，就会有十几样之多。拉马努金用右手（只能用右手）将饭和蔬菜搅拌，再用手指当作钳子把饭菜捏成一团送到口里。

南印度的饭菜很有味道也很有营养，虽然不大中看，却绝不会淡而无味。加咖喱粉的菜又辣又有香料味，其他的菜又太甜。米饭和酸奶除了本身有营养之外，也有中和辣味和甜味的作用。主要的水果是椰子和香蕉（一种大蕉，较短较粗，味道倒与普通香蕉相同），外加芒果和番石榴。

拉马努金从来没有吃过肉，但是这并不是存心的自我牺牲行为，他和所有的婆罗门一样，是彻底的素食者。要是说“不准”他吃肉也不准确。这里根本不需要说不准，正和信正教的犹太人或回教徒不吃猪肉也用不着明说一样，不吃就是不吃。有的人吃，他就不吃。吃肉这个念头会令他作呕。有些朋友在他面前连发红的东西（例如甜菜根）都不吃，免得让他以为是血。

拉马努金身为婆罗门，该做哪些或不该做哪些，他学起来像学走路学讲话一样自然。正如一位学者卡斯泰尔斯（G. Morris Carstairs）描述印度人之社会性如何运作时所说，“当孩童学会如何负起自洁的责任之后，便十分自然地懂得了不被最低种姓的人接触以免被污染的重要性。一旦发生了这样的事，做母亲的或做祖母的会把他叫来沐浴更衣，使他知道回避低种姓的人如同回避秽物一样”。

印度男子每天早上的梳洗细节很讲究。先上厕所，左手用水洗屁股；接着洗澡，最好是在圣河里洗，譬如高韦里河；耳朵、眼睛和鼻子要洗得特别干净。喝水的时候，杯子绝对不能

碰到嘴唇，要举起杯子朝嘴里倒。饭后站起身来，离开用餐的地方再像仪式似的将水浇到手上清洗。那里没有好的卫生设备，又肮脏，是最使英国人感到困扰的地方。可是正统的婆罗门对日常生活细节的一丝不苟是无人可比的。

虽然有人批评他们自视太高，但在他们自己眼里仍然认为，即使最穷困的婆罗门也比其他的人更干净更纯洁，教育受得最少的也比别人知道更多的梵文——印度教经卷所用的印度古文，别人都应该尊敬他们听从他们，他们在教育上，在职业上都高过别人。所有这些使他们有了一种共同的想法：身为婆罗门是生前注定的——拉马努金不会没有这种想法。

#### 4. 成绩高得离谱

在婆罗门中，抛掉世间的一切做一个四方流浪的乞丐，来换取精神生活的丰富，并不被看作是失败的事。婆罗门文化中一直保存着苦行求福的传统。梵文学者因高斯先生(Daniel Ingalls)在他的论文《论婆罗门的传统》中就说“印度的各个阶级都敬重几百年来奉行苦行主义和神秘主义的神性，正如近两百年来西欧的资产阶级崇拜艺术的(神性)一样”——不论他们懂不懂这种东西，高调总是不离嘴。

因为这种传统，他们对过分热衷名利的人不屑一顾。提倡对丰富灵性生活的追求，即使牺牲物质生活上的安逸；甚至贵族阶级里一些富庶的家庭中所有的摆设、光光的地板和最普通的家具，从西方或当地较为富裕人家的水平看来也显出简陋和斯巴达式的庄严。“生活简单而思想高雅”，这就是一位南印度的婆罗门后来对这种传统所下的评语。

可是在拉马努金成长的年月，事态稍有改变。婆罗门仍然是僧侣和博士、逻辑家或诗人，梵文经典的学者和生活方式

的指导者。但是古老的冥想式传统已渐渐采取了新形式，由属灵趋向属世。正和当时在欧洲或美国的犹太人一样（100年后，南印度人常常将自己和犹太人相比），他们渐渐转变成专业人才。

拉马努金出世后不久的人口统计显示，南印度 60 万男性婆罗门中有 15%——这是相当高的比例——是公职人员或不同程度的专业人员。在有大专以上学历的人中他们占的比例最大。一代人之后，到 1914 年左右，马德拉斯大学 650 位毕业生中，至少有 452 位是婆罗门，这个比例比婆罗门在总人口中的比例大 19 倍。由商人或律师组成的旧中产阶级过去来自各个不同种姓的人，英国人则给他们带来一个新的中产阶级，包含掮客、经纪人、教师、政府官员、公职人员、新闻记者或作家和政府书记等等。这些位置都开始由婆罗门担任。

在挤满了婆罗门的贡伯戈纳姆，每五个成年男子中就有一个能读能写。除了地区首府坦焦尔或马德拉斯之外，这在南印度可能算是第一。贡伯戈纳姆的婆罗门似乎对哲学或其他要用到智力的问题最有兴趣，需要动脑筋的东西他们就有胃口。因此一位英国的观察家说“他们以其心智的敏锐而闻名于世”。拉马努金的双亲，不算赤贫，勉强算得上中产阶级，对英文固然一窍不通，但对泰米尔文却不是文盲；然而他们的朋友们大多家境较好，所以可以做律师、工程师或公务员。

在做这些事情时，他们发现在他们的生涯中有一点是共同的：处处都要用英文。

拉马努金的母语是泰米尔语，这是达罗毗荼语系中的一支。属于该语系的还有马拉雅南语（Malayanam）、卡纳里语（Canarese）和听起来如音乐的泰卢固语。欧洲学者赞赏泰米尔文，因为它的逻辑十分清晰，“这是律师和文法学者创造的语言”，有人曾这样评价过。从马德拉斯向北，西至尼尔吉里

丘陵(Nilgiri Hills),南及次大陆顶端的科摩林角(Cape Comorin),这片腰形地带以及锡兰北部都用泰米尔文。它并非生僻的语言,和北印度的语言不同,它有丰富的文学作品,可以追溯到公元前5世纪,并且夸称有一种诗体和古希腊的诗很相似。讲泰米尔语的人约有2000万。

20世纪初,直到如今,印度最有地位的还是英文。因为它是统治者的语言。它推动政府的操作。它是通用语言,讲十几种不同方言的印度人,若彼此无法交谈就转用英文。拿整个印度来说,会英文的人比例很小,连教育程度甚高的泰米尔男性婆罗门也只不过有百分之十一的人会英文(1911年的统计)。所以会讲会写英文的人,由于供求的需要,自然就最吃香。做小职员的,只要能胡乱讲几句英语,薪水都会多几个卢比。这是进专业界的门票。

拉马努金进坎伽扬小学后便开始学英文,所以算开始得很早。1897年11月,在他快满10岁的时候,以全地区第一名通过了小学毕业考试——考的是英文、泰米尔文、算术和地理。第二年的1月便进了市立中学,这是用英语教学的中学。

市立中学始创于1864年,本有两栋建筑在大街(Big Street)上。这是穿过城中心的主要通道。几年之后,当地的一家学院想停办低年级的班次,一批热心公共事业的人士,就想把市立中学扩充来包括这些低年级班次。原计划是要把原有的建筑拆掉,然后在原地重建。可是这位留了胡须、身材魁伟的校董马达利尔先生(Thambuswami Mudaliar)却坚持不答应,他要重新盖房,并将芭蕉园附近自己的7亩地捐出来,而且第一栋楼开工兴建时亲自监工。

如今市立中学一栋栋白色的校舍,就像热带沙漠里的绿洲。一排排高大的麻果杉树围住沙地运动场,挡住外来的嘈

杂声。拉马努金就读的时候,第一排教室刚盖好几年,房顶是红瓦,覆盖在柱廊上的棕榈树叶垂下来。每间教室前后相接,所以整栋建筑正好是一间教室那么宽,两旁开窗以便通风。

开着的窗户当然会传来这些少年的喧哗声,不过并不太吵。许多年后,校友们还会回忆起那些穿白袍戴头巾的老师们如何受到同学们的尊敬。拉马努金在校时,校长是克里希纳斯瓦米·耶尔(Krishnaswami Iyer)先生,他前后当了22年校长,时时板着脸,又爱在教室间走来走去。他的拐杖敲在地上的声音似乎向同学或老师警告他的到来。有时他会走进教室,替老师上课,问同学问题,一直到下课——神气十足。所以在讲格雷(Grey)的《伊顿公学》这篇文章时,学生们常把小小的市立中学想像成伊顿公学,把穿过校园的排水沟当成泰晤士河。

这个学校离拉马努金的家步行只要5分钟,它吸收了贡伯戈纳姆所有的精英少年,引领他们走到上大学的路或开始他们的职业生涯。校友们后来的回忆表露出他们对这所学校的珍爱。拉马努金在此被熏陶了6年,这是他学习生涯中最为满意的时光。

每一个有前程的学童,事后总可以追述其成功光环的预兆,看得出拉马努金是天赋早慧的。他进市立中学一年级时才10岁,这相当于美国的7年级。上二年级时,同学就开始找他帮忙解数学问题了。

不久之后,至少是从三年级开始,他就找老师的麻烦了。有一天,数学老师说任何一个数自身相除一定等于1;3个人分3个水果,每个人一定得到1个。他又说,1000个人分1000个水果,每个人也得到1个。拉马努金站起来问:“0除0是不是也等于1?没有水果也没有人来分是不是每人也都得到1个?”

拉马努金家里总是缺钱用，所以找房客来寄宿。当他 11 岁时，家里有两位房客，都是婆罗门家的子弟——一位来自附近的特里奇诺波利(Trichinopoly)区，另一位则来自远方的蒂鲁内尔维利(Tirunelveli)，并在附近的政府学院(Government College)里读书。他们发现拉马努金喜欢数学，就把自己所知道的告诉他。几个月之后，他们所知道的都讲完了，所以拉马努金就天天缠住他们要借学院里用的教科书。其中有一本龙尼(S. L. Loney)著的《龙氏三角学》，<sup>\*</sup>出版于 1893 年，是南印度各学院及英文预备学校里最流行的一本英国教科书，内容也相当深。拉马努金 13 岁时，就全部掌握了。

拉马努金又从一位年纪大一点的同学那里学会解三次方程。他对三角函数的理解和学校所教的不同。他不把它们看作是直角三角形里各边的比，而看作是比较高深的无穷级数。 $\pi$  和  $e$  这两个在高等数学中很常见的“超越数”，他可以一口气背到小数点后很多位。考试的时候他只要一半的时间就可以做完。比他高两班的同学，拿一些他们认为相当难做的题目来考他，却发现他一看完题目就解出来了。

有时，他的才能也有妙用。全校 1200 来个同学，分派给 30 几位教师来教，各用不同的教室，而且有些学生另有特殊需要。在市立中学，这些麻烦透顶的工作本来都由一位资深数学老师伽纳帕第·苏比尔(Ganapathi Subbier)负责——他把这交给了拉马努金。

当他 14 岁上四年级的时候，一些同班同学便开始认为他是无法交往的天外之人：“我们，包括老师在内，完全不能了解他。”一位当时和他同班的同学在半个世纪后回忆道。有些

\* 此书在解放前国内的高中相当流行，有多种译本，书名就叫《龙氏三角学》——译者

老师面对这位太聪明的学生感到很不自在,但是大多数人,不论懂或不懂他在说什么,都抱着敬而远之的态度。

在学校里他是一位小有名气的人物。在校的几年里,得到许多奖状和许多英文诗集作为奖品。1904年,拉马努金得到拉奥奖(K. Ranganatha Rao prize),克里希纳斯瓦米·耶尔校长在讲台上介绍他时说,这位学生应该得到比满分还高的评分,如果有这个规矩的话。

100分、A<sup>+</sup>,都不足以评判他的成绩,拉马努金的成绩高得离谱。

在学的这几年,拉马努金的生活还算相当平稳。他是母亲的宝贝,在学校里成绩好又有进取心,第二年就得到奖学金,就读位于城市另一端的政府学院。学业上的成就,好的职业,美满的婚姻……似乎都伸手可及。

但是很快,非常快,这种平稳的生活就被破坏了。拉马努金将要进入一个新的境界,心里充满极为强烈的求知欲,毫不松弛的专注,这种心情将统治他终生。

拉马努金固然有他合理可解释的一面,但是也有他全凭直觉不合常理的一面,这些都是他的西方朋友无法理解的——可是他却处之泰然,向这种境界交托了自己的一生。

## 5. 纳马卡尔的女神

走进萨兰伽帕尼寺的外厅,要等好几分钟眼睛才能适应里面的昏暗。从灿烂的阳光下走进来更感觉阴森。有一点光从旁边照进来,将雕刻精美的各具形态的石狮、种种几何图形的石块以及大厅里密密排列的石柱衬托得更为柔和。

离光源更远的石柱之间,是蝙蝠聚集的地方。拉马努金甚至听得到它们翅膀扇动的清脆声响,也看得见它们一只只

倒吊在屋顶上，吱吱喳喳乱叫一阵，再突然一阵风似地飞掉。

西方的教堂，其建筑结构的设计使你有向上升起的感觉。这里则不一样，你的虔诚似乎渐渐深入内心。寺院的高墙之内有一个很大的敞开的天井，天井内又有一片有顶有支柱的场所。更远的地方有一辆很大的双轮战车，车轮的直径有好几英尺，石雕的马和象在拖车。这辆车停在车房内，里面点了一盏长明灯。在至圣之处，大神毗湿奴——它是这里的主要神像，在代表永恒的多头蛇身旁从睡梦中醒来。

寺院里处处闪着香客的灯火，喃喃的诵经声随处可闻。大大小小的殿堂里，幽暗的角落里，飘来拜神用的香味。越接近中央的圣坛越幽暗，也越神秘，越无法分辨周遭的一切。事物显得更小，更紧凑，更靠近。寺院围墙外喧哗大街上的景物可以供大众观赏，而这里，在几百年来被香火熏黑的石穴中，在袒胸的僧侣守望之下，则是个人与神交往的圣地。

这个壮观的寺院是公元 1350 年左右由纳亚(Nayak)王朝建起的。塔门“瞿布罗”(gopuram)<sup>\*</sup>为 12 层的梯形塔，底宽约 90 英尺(约 27 米)，高约 146 英尺(约 44 米)，上面刻有精细的雕像。举首仰望高不可及，更看不清雕像脸上精心刻画的表情。着衣的、赤裸的、坐着的、站着的，各式各样的人像和兽像；有写实的，也有极为怪诞的；有的跳舞，有的骑马，有的求爱，有的奏乐——栩栩如生的人间绘世图，紧缩在一大块岩石上。

拉马努金就在这寺院的附近成长，这些形象对他来说并非毫无影响。每一个画面都是一段他从小就听说的传奇。他

\* 瞿布罗，指南印度神庙的“山门”，也就是神庙围墙的入口，轮廓为梯形高塔，上有圆形穹顶，以巨石为基座，上为砖墙和半壁柱，外墙布满雕刻。——译者

跪在母亲的膝盖旁听到的来自伟大史诗《罗摩衍那》和《摩诃婆罗多》的那些故事，有娱乐性的也有教育性的。每个印度小孩都知道淘气的小克里希纳(Krishna)：那时克里希纳还只是个小孩，还没有变成神，他来到戏水的妇人群里，偷走她们的莎丽，放在树顶上。她们到处找他，要他归还她们的莎丽。在这里，拉马努金只要一抬头便可以在瞿布罗高墙的石像上看到这个小克里希纳骑在树枝上的淘气样。

他常常来到这个寺院，庆祝节日，进香膜拜。再不然就独自或跟家人一同来消磨时光。拉马努金可以说是在这个寺院的阴影下长大的。一出家门口，只要转头就看得见在街道顶端的寺院，瞿布罗墙上的石雕像都可以清清楚楚地看见。他家所在的街名，萨兰伽帕尼·三尼第街名中的“三尼第”就是进香之路的意思。

在寺院里并不一定要肃静，拉马努金自然也常常在此和人交谈。可是这石块砌成的绿洲中，保持着沉静安详的气氛。在这绿洲之外，整个印度都很喧哗嘈杂。

拉马努金常常在这有石柱支撑的大厅的清凉之中寻求清净，离开他的家，又离开高挂的烈日，有时在白天就睡着了，写满笔记的数学练习簿就垫在胳臂下面，身边的石板地上用粉笔写满了方程式。

城里及附近的市镇有十几座如此的大寺院，有的敬拜湿婆，有的敬拜毗湿奴。每一座寺院的瞿布罗都十分堂皇壮观。也都有石柱支撑的大厅、幽暗的圣堂和祭奠前用的净身大水池。整个城市里弥漫着氤氲的气氛。每12年恒河的水注入玛哈玛汗的水池里——照地理书的说法，恒河还离得很远，可是在贡伯戈纳姆，这却是不争的事实。提到它时也用不着加上什么“根据传统的说法”，“照流传的说法”等修饰语。

在这个世界里，灵性、神秘性和抽象性就是生活的重心所

在,而不是生活的附件。拉马努金只要出了家门,上了街或进了寺院便不愁听不见有人在诵念这个那个神的神迹,或者讲述7这个数字的神秘性,或论述“薄伽梵歌”里所叹诵的为人之道等等。

在拉马努金成长的高种姓婆罗门生活圈里,并非不考虑维持生活的必需品。金钱、舒适和安全都要各有着落。但是毗湿奴及其轮回论,它们的涵义,如何邀得神的宠爱,节日的来临,敬拜的仪式等等也须各有着落。这些与日常生活并不冲突,而是合为一体。对南印度人来说,这些是日常生活的一部分,就像板球和下午茶是英国上层人士的一部分,或自由经营、买小汽车则是美国人生活的一部分一样。

直到拉马努金去世好几年之后,一些自以为能了解他的西方朋友仍然说他的宗教信仰并不深,说他的心态和杰出的西方人士并没有什么差别;说他只不过照章行事,外表看起来像个信奉印度教的人而已

他们全都错了。

在他成长的岁月里,他所过的生活完全是印度婆罗门的生活。他打发结(kutumi),剃光前额,绝对素食等等;经常去寺院,在家里也奉行各种节日和礼仪;走遍南印度各处去进香;家里所拜的女神,即纳马卡尔的娜玛吉利,总挂在嘴边,一举一动完全遵照她的旨意。用外国文字所写的数学书,他可以一看就通,这个能耐全来自这位女神。他能背诵各种经文,诸如吠陀经、奥义书和其他印度教经文。他偏爱替人圆梦,对玄奥的异象很有兴趣,喜爱神秘,他的印度朋友常常这样评论他。

他住在贡伯戈纳姆的那几年里,每年都要步行走过城东的火车站。出了城之后,草顶泥墙的小屋渐渐稀少。路旁的木柱上拴着牲口,羊群在房屋间窜进窜出,路边有些小小的神龛。小径渐渐离开大路通向青翠的乡间。大约离开贡伯戈纳

姆 4 英里(约 6.4 千米)多路的地方便会碰到一个大弯道,这就到了第鲁纳格斯瓦南(Thirunageswaram)镇地界。古老的乌比利亚潘·戈伊尔庙(Uppiliapan Koil temple)就在这里。每年印度历的室罗伐拿月(Sravana)月圆的时候,拉马努金都要到这里来更换圣巾。

5 岁的时候,他参加了盛行的踏火歌舞祭祀典礼,这个祭典通常要进行 4 天。这时,他得到了圣巾,这是一股棉织品,从左肩斜挂到右腿,穿过袒露的前胸像子弹带一样。这个庆典叫入法礼(upanayanam),象征一个婆罗门的“再生”。依据法典,初生是来自母亲,拿到圣巾就是再生。此后,他就可以背诵神圣的吠陀经文及参加宗教仪式。每年 8 月,他和别的婆罗门一同在这座庙里献上祭品,点上圣火敬拜。

他的一位朋友回忆说,有一次他和拉马努金在月夜里步行了六七英里(十来千米),抵达附近的小镇纳基亚柯维尔(Nachiarkovil),到一座拜毗湿奴的庙参加庆典。一路上拉马努金一直背诵《吠陀》和一部名叫 Shastras 的古老梵文经典,而且一面背一面讲解。

还有一回,拉马努金 21 岁的时候,事先没有通知就到他一位老师家去串门。谈了一会儿之后,只听见他高谈阔论大讲神与零和无穷大之间的关系——居然每一个人都一直听到夜里两点多钟。拉马努金常常这样,沉溺于哲学和神学的独白之中。他那无限的想像力让他讲得天花乱坠,在座的朋友们虽听不懂却感到趣味盎然。每一位似乎都听得很专心,因此事后都记得他那逼人的眼神。

“十万分地虔诚”,他的一位同班同学拉达克里希纳·耶尔(R. Radhakrishna Iyer)如此描述他“真正的神秘,绝对的宗教信徒”,另一位以前的数学教授斯里尼瓦散(R. Srinivasan)如此回忆。到最后几年,他受到西方的影响,拉马努金逐渐趋向世

俗的、狭窄理性的价值观。但那要晚得多。他生长在南印度，宗教的、属灵的气氛无所不在，他不可能不受到感染——几乎连他反叛的时候都摆脱不掉这种影响。

拉马努金从来没有反叛过属灵的领域。他虽不能亲见，但他从不否定，也从不敬而远之。反之，他去接近它。他的一生和他的出生地南印度毫无冲突，其一生与它和谐共鸣。

南印度是自成一体的世界。印度北部的大平原上，千百年来不断有外族侵略、战争、动乱和改朝换代。公元前 1500 年左右，肤色浅淡的印欧语族人越过北方的山口占领了整个地区。一连 800 年，佛教和婆罗门教竞争，最后佛教被制服。到了 10 世纪，穆斯林又来侵略，最终建立了他们自己的莫卧儿帝国。帝国屡屡更迭，种族相互融合，宗教相互掺杂，人们相互争斗。

南印度在高山峻岭和河流的屏障之下，却一点没受到影响。

在如今的孟买以北地区，沿着次大陆的西陲，北回归线所在的纬度附近，蜿蜒着温迪亚山脉(Vindhya)。这是一长条断断续续的山脉，高度超过 3000 英尺(约 1000 米)，而且深入内陆 700 多英里(1000 多千米)之深。山脚下是纳巴达河(Narbada River)和达布蒂河(Tapti River)，一直流入阿拉伯海。默哈纳迪河(Mahanadi River)朝东流入孟加拉湾。这一切使得向印度半岛南端行进非常困难，再加上地幅宽广，侵略者走了多远就精疲力竭了。

所以，印度南部既不受来自北方的骚扰，而新文化之风也吹不进来，这片地方就一直保持原有的面貌。可以说是十分的“纯”。全印度算这里的人种最单一，大多数是达罗毗荼人，黑色卷曲的头发，宽鼻子，肤色几乎和非洲土著一样黑。甚至连婆罗门，大家本以为他们是印欧语族人之后，肤色也比北印

度的印欧语族人要深得多。南北之间的语言也不同。泰米尔语和达罗毗荼语跟印度上语及以梵文为基础的其他北印度语言很少相似之处。拿宗教来说，南印度比印度其他地区更近印度教。拉马努金所在的坦焦尔区，十分之九的人口信奉印度教，只有百分之五信伊斯兰教。南印度的居民把南印度看作一个特别的地区，当他们写信到国外时，“南印度”变成他们地址的一部分。在政区图上当然没有这个地名，由此可以看得出根深蒂固的文化烙印。

浓厚的属灵精神能够在南印度开花结果。如果把北印度比作启蒙时期的欧洲，南印度则仍然在中古时代。如果孟买以商业中心著称，加尔各答被看作政治中心，则马德拉斯纯粹就是宗教中心。在这里让你分心旁骛的东西很少——只有稻田、寺院和神。

在这个与世俗隔绝的大环境下，传统的文化总认为神秘的魔法在起作用。所以拉马努金十分自然地相信神及圣功，他的超乎一切的自我与灵性世界有着看不见的联系，就像呼吸那样自然。

在整个的南印度，有十几户人家的村落就有供奉不同神祇的神龛——有些是四五英尺高的小砖屋，有些只是石块堆成的小房子——供奉着玛里亚玛(Mariamma)或耶纳尔(Jeynar)，塞利亚玛(Seliamma)或安伽拉玛(Angalamma)。这些不同的神或女神都是从早期农业社会里流传下来的：村民们祈求这些大能的神祇为他们排去灾难，例如天花、霍乱或牛瘟。他们认为多半的神是女神。少数是后来加上去的，不是被害害的人就是因分娩而去世的妇女。1904年，有些孩子以为听到了来自蚁丘的喇叭声，不久，附近村落里一下子就有几千人供奉蚁丘神，“他们平躺在地上，全神贯注地祷告”。

村落里供奉的村神(当地称为 Grama devata),和印度的婆罗门教毫不相关,是大学里研究比较宗教学的学生所读不到的。村民们口口声声说他们拜毗湿奴或湿婆这两个大神,但是--一旦有瘟疫或大饥荒,他们就到这些神龛——他们的监护神的住处去祈求护佑。

一些印度教批评家质疑:这是否偶像崇拜?这和原始民族的万物有灵论一样吗?有些专家甚至认为,这些达罗毗荼神都是印度教的一部分。这种看法也错不到哪里去。

但是以贡伯戈纳姆为据点,而拉马努金深深浸染其中的印度教却与此完全无关。一位英国观察家说过,在坦焦尔“婆罗门印度教,而不是那些被忽视的异教,是一个活生生的现实,在其他地区则不然,那是由对民间的小神、妖精、鬼怪的崇拜支撑起来的”。

南印度的大庙宇表明了这一区别。照某专家的说法,贡伯戈纳姆、甘吉布勒姆、坦焦尔区、马杜赖和拉梅斯沃勒姆等地的寺院,比北印度一些有名的寺院都更宏伟,“就像西敏寺和圣保罗大教堂比伦敦其他的教堂都更伟大一样”。例如,拉马努金 1901 年随父母亲和一个小弟弟去进香的拉梅斯沃勒姆庙,17 世纪费时约 100 年修建在面对锡兰的一个小岛上。纵深 1000 英尺(约 305 米),宽 650 英尺(约 198 米)。瞿布罗的每面墙都高达百英尺(约 30 米),走廊长 4000 英尺(约 1.2 千米)有余,处处都是精美的雕像。

来自西方的游客进入这些寺院,看到令人眼花缭乱的各式各样的神像——那些雕刻的人物,大大小小的神,木头的、石头的,有些还戴了花环和穿着衣服——都会惊讶得哑口无言。可是对主流的印度教徒来说,这正代表他们伟大的信仰,村落里所供奉的小神是不可比拟的。

印度教中的三大主神是梵天、湿婆、毗湿奴。依据传统,

他们各掌管宇宙万物之出生、毁灭和护持。梵天创造天地之后，就被认为是冷酷而且高高在上，所以实际上就不太受重视。故而婆罗门印度教的两大支派就是湿婆派和毗湿奴派。

湿婆神天生有魔鬼的气质，凶猛、邪恶而且性欲极强。故而各个拜湿婆神的寺院里都有以男性的阳具为标志的主要装饰。想要有惊天动地、山崩地裂的变化，就得求湿婆神赐福。

毗湿奴神以护持为主，所以这一派的信徒平和含蓄。一位当代英国学者称之为人性精神——即比较温柔的意思。这一派的代表人物是罗摩和克里希纳。他们都是印度民间故事里的英雄，也是由毗湿奴神再生入世的两个化身。

在印度民间故事里，这三位主神各以不同的称呼出现。湿婆可以名为拉美斯瓦拉，毗湿奴可以叫那罗希摩或文卡塔拉玛。他们又各有配偶和亲属，这些人物经过一段时期之后也就变成崇拜的对象或自己的迷信圈子中心。例如，拜毗湿奴神的信徒转而崇拜他的配偶拉克希米(Lakshmi)，或猴神哈奴曼(Hanuman)。每位神都有不同的个性及其追随者。

有些崇拜者用石头刻出他们崇拜的人物，当作纯真而单一的真神。他们全心全意地敬拜，和村民敬拜村神一样。南印度流传一种说法，认为“村落里的神和吠陀婆罗门的神相互融合”之始可追溯到基督教初建时期，因而带来相辅相成的崇拜仪式。

但至少教养较高的印度教徒能了解这些石刻的“神”只代表某一位神的一面，或其形象之一。敬拜它，可以让你领悟到众神的归一性。然而，对于其他灵性较浅的信徒，这些石雕的神像只能看作是把他们引向更高更深境界的引导者。

印度教的睿智就在于它能包容一切。这个宗教有极深厚容忍性。它不否认其他任何形式的宗教，它的道路也不是单一的，它并不采用固定的崇拜仪式或信仰教规，它能接受万

物万众。各式各样的信徒都能找到让他崇拜的神或女神，他们可以拜某一种化身，某一个人物，某一个神，皈依于它，让自己心里平安，让神引领他们到达更高更深的属灵世界。不论目的何在，心态如何，情绪如何，心理状况如何，或者社会地位如何，都会有一位神呵护你。神以不同的形式出现故而无形，神以不同的名称出现故而无名。

许多南印度人的家都在数以千计的神祇中挑选一位来敬拜，成为该家族代代相传的家神，和其他祖产一样留传到后代。这就是家神，每当遇到困难，就向它祈求，就像天主教徒总要向某位特别崇敬的圣者祈求一样。事情不顺心时，一定先向家神祈福，此后再走别的路。在南印度，许多广游各地，见过世面的婆罗门——通晓英语又精通梵文，能讨论印度的国家主义、泰米尔语的诗篇或者数学的学者或专业人上——都经常热心地在家神的神龛前祷告。

拉马努金家里祖传的家神是娜玛吉利女神。她是那罗希摩的配偶，那罗希摩也叫狮神，是毗湿奴的化身之一。娜玛吉利的神龛在纳玛卡尔，离贡伯戈纳姆约 100 英里（约 160 千米），相当于到埃罗德的路程的四分之三，很靠近柯马拉塔马尔的老家。娜玛吉利的名号老挂在他母亲的嘴上，每次祷告都先提到她，事无大小全遵照她的旨意做。

拉马努金的父母亲结婚之后几年都没有孩子，所以他们就向娜玛吉利祷告，想要一个孩子。拉马努金的外婆兰伽马尔非常敬信娜玛吉利，每次祷告时都好像身不由己精神恍惚。有一次，一件涉嫌学校老师的奇怪的谋杀案发生前，娜玛吉利就曾托梦给她。另一次，在拉马努金出生前好几年，这位女神给她泄露天机，说是有一天将借她的外孙对人说话。拉马努长大时，常常听到这些故事。所以他嘴上也一直挂着娜玛吉利的神名，求她赐福，指点他面前的路。他常对他的朋友

说,他的数学天赋是娜玛吉利赐给他的,将数学方程写在他的舌头上。并且在梦中教他数学。

他这样告诉他的朋友。那么他自己信不信呢?

他的外婆和他母亲都信。她既然求子得子,便更虔诚,对娜玛吉利的信心也更强。柯马拉塔马尔就是这样的人。为什么?因为她完全是靠信心才得到儿子的。她的所作所为,处处都表现出这种生命力和坚强的毅力。

她的这些个性在生活中处处显示,所以用不着教导,拉马努金就完全承袭过去。他知道要听从内心的呼声,并且要有毅力遵行。他的父亲则不同,整天照章处理各种琐事,心里老为几个小钱烦恼。他希望拉马努金能娶一房好媳妇,给家里带点钱,让生活安定。柯马拉塔马尔想得远得多,她活在一个较丰富的内心世界里——同时也把拉马努金拉了进去。

由于这一点,当年轻的拉马努金受到一股外来的新的力量影响时,他母亲让他去拥抱这新的影响,并将自己的终生投注在内。

## 第二章

## 遍尝欢乐

(1903~1908)

## 1. 卡尔的书

大概是在 1903 年, 拉马努金离开市立中学前几个月得到了一本书。这很可能是在他家寄宿的那两位大学生给的。书的名字叫《纯粹数学与应用数学基本结果汇编》(A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics, 以下简称《汇编》)。仅就书名而言, 看不出为什么这本书对他有如此的吸引力。

简单说来, 书里列举了约 5000 个数学方程, 一个接着一个, 有些是定理, 有些是公式, 还有几何图形, 以及其他数学常识; 一页接一页, 分门别类, 同时用大号黑体字编了号以便前后查阅。内容包含代数、三角、微积分、解析几何、微分方程——19 世纪后期所知的数学大多在内。这并没有堆满整个书架, 只是不太厚的两册而已(拉马努金很久之后才看到第二卷)。

“这并不是一本了不起的书,”后来有人置评, “是拉马努金让这本书成了名。”

这本《汇编》是卡尔(George Shoobridge Carr)的杰作。不过他本人并不是天才, 而是一个资质平庸的数学家, 在伦敦做了好几年私人教师, 这本书就是他历年讲稿的总汇。

19世纪后叶，英国学数学的学生最为关注的大事，就是以艰深出名的称为 *Tripos* 的数学荣誉学位考试。一生的出路都取决于这个考试的名次。由于这种考试制度、产生了当今教育家所说的“应试教育”。很快，数学家们都认为有改革的必要。但是在 19 世纪 60 年代，也正是这本书出现的时候，还没有人鼓吹改革。既然考试如此重要，许多为学生补习的私人教师乃应运而生，也就不足为怪了。

卡尔自己的杏坛生涯也有波折 1837 年他出生于廷茅斯(Teignmouth)，清教徒就是从那里出国去新大陆的。他先在英吉利海峡中靠法国海岸的泽西(Jersey)岛求学，后来又进了伦敦大学学院。在 1866 年或更早开始私人教学。显然他对这项工作很认真，时时修改他的讲义，采用不同的教学方法，为学生提供帮助记忆的口诀，让他们容易掌握一大堆的课程。

38 岁时，他又重返学校就读，进了剑桥大学的冈维尔和凯厄斯学院(Gonville and Caius College)。这种做法很合乎现代人的想法，但当时并不流行。1880 年他得到学士学位，然后在 46 岁时得到硕士学位。

他不是最优秀的学生。*Tripos* 考试的成绩列入二等，而不是一等，名次大概是十二三名。他知道自己不是英国数学界里的佼佼者，所以在《汇编》的序言里他就说过“比我强的人”会写出更好的书，而且“比我强的人可能会有更大的成就”——例如在数学上有独创的发现，这是他的才智所无法胜任的。

虽然卡尔并不是最高明的数学家，却对调教将会比他更强的人有很大的热忱。总而言之，在他得到剑桥的学士学位之后不久，即 1880 年 5 月 23 日，在伦敦市外的哈德利(Hadley)的案头上，他完成了《汇编》的第一卷，他的名字就永远和拉马努金结在一起。第二卷到 1886 年才问世。

卡尔这本书的长处在于它是动态的，公式与公式间似乎毫不费力地融合在一起，使全书的发展很容易接受，自然形成合理的逻辑。

我们以第一页的第一个命题为例：

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

首先，这是一个等式。它表达（任何等式都表达）等号左边的东西和右边的一样相等，例如  $2 + 2 = 4$ 。不过我们举以为例的等式里没有用数字而是用符号——英文字母中的  $a$  和  $b$ 。但是用符号并没有任何改变。有些等式中的变量一定要等于某个确定的值等式才能成立，这样的等式称为方程。因此要“解”这个方程，就是要算出能使等式成立的这些变量的值。例如  $x = 3$  或  $y = -8, 2$  等等。上面所举的等式是恒等式，不论  $a, b$  是什么值，这个表达式总是能成立的。

让我们来试试看，让  $a = 11, b = 6$  如何？

那么  $a + b$  就是  $11 + 6$ ，结果是  $17$ ； $a - b$  就是  $11 - 6$  等于  $5$ ；现在把这些数值代入卡尔的方程——将  $(a + b)$  和  $(a - b)$  相乘，即  $(17)$  和  $(5)$  相乘： $17 \times 5$  等于  $85$ 。这是方程右边的值。

现在来看左边， $a^2$  当然就是  $a \times a$ ，也就是  $11 \times 11$ ，等于  $121$ ； $b^2$  是  $36$ ， $a^2 - b^2$  就是  $121 - 36$  或  $85$ ，正好和右边的值相等；既然两边相等，方程也就可以成立。

这个方法可以无限制地做下去——用不同的数来验证方程能不能成立。用大数、小数、正数、负数、分数或小数等等——你可以如此做，但谁愿意这样一直做呢？

数学家用的方法比较合理——那就是证明不论  $a$  和  $b$  是任何值，这个恒等式都成立。要完成这个证明，首先是不要从数目字下手，而要从符号着眼，将  $a$  和  $b$  当作数目字来做加减乘除。

题目中的等式是叫我们将 $(a - b)$ 和 $(a + b)$ 相乘。这个乘法很容易做：假定你每小时赚 10 美元，同时每小时又要花掉 1 美元，那么你可以将工作的小时数乘上 10 再用小时数乘上 1，然后将两者相减。另一个方法是将工作的小时数乘上 9，结果是一样的。应用于我们的例子，就是将 $(a + b)$ 分别乘上 $a$ 和 $b$ ，再两者相减。用符号来写就是：

$$(a + b)(a - b) = a(a + b) - b(a + b)$$

下一步呢？ $a(a + b)$ 是 $a^2 + ab$ ， $b(a + b)$ 是 $ab + b^2$ ，而 $ba$ （就是 $b \times a$ ）和 $ab$ 是一样的，所以

$$(a - b)(a + b) = (a^2 + ab) - (ab + b^2)$$

数学家在处理等式的时候，会置身于许多数字、字母和符号中间。正如家里需要定期清理一样，数学垃圾也要扫除，把数学屋中最吸引人的东西尽善尽美地留给人看。这种清理工作叫做“归并同类项”，就是把相同的实体放在一起。脏衣服放在洗衣机里，干净的放在柜子里，零食放在食品柜里。东西要分门别类放在该放的地方。

在这里，我们要把括号里乘出来的结果整理一下：所有的 $a^2$ 加在一起， $b^2$ 加在一起， $ab$ 也加在一起。这一来就得到有趣的结果。两项 $ab$ 相互抵消，就“不见了”，因为 $+ab$ 和 $-ab$ 相加之和是零。故而这两项就看不到了，只剩下 $a^2 - b^2$ 。这就是原等式左边的值，也正是我们所要证明的。

上面这个简单的例子是用来说明“证明”是怎么回事，虽然许多数学家不会认为这也算得上是证明。至少看得出来，不论 $a$ 和 $b$ 是什么数，卡尔的这个等式的两端是相等的，所以是一个恒等式。用不着去检验 $a = 735, b = 0.0231$ 时方程能不能成立。它一定成立，因为已经证明了它的通式。卡尔的第一个等式谈到这里为止。

他的第二个命题是：

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

这个恒等式的证明和第一个没有多大的差别,将所有的符号相乘相加再相减,将相同的项合并在一起——苹果和苹果放在一起,橘子和橘子放在一起、不要把苹果和橘子放在一起——希望有些项会相互消掉,然后等号两端的值相等。就是这么回事,几乎不值得去做……

“几乎不值得去做”讲得如此自然、如此正常——几近冲动——的这句话,足见卡尔教学的智慧所在(也可以体会到数学家通常是怎样思考的)。第二个恒等式和第一个虽不相同,但却很相似,像是从第一个延伸来的。将这两个表达式一个接一个讨论,卡尔先生是有计划的:他有一个方向,有一定的发展,这并非来自数学等式本身,而是由他讨论的先后次序暗示的。第一个等式讨论  $a$  和  $b$  的“二次方”,两者的关系是  $a^2 - b^2$ ;第二个等式讨论  $a$  和  $b$  的“三次方”,关系是  $a^3 - b^3$ 。那么有人自然要问  $a^4 - b^4$  的等式应该是什么样?做了两个之后,你一定以为做这个方程不会有问题,只要仿照以前用的方法就行了。实际上也正是如此,得到的结果不出意料。

因此卡尔先生就没有再做下去,否则既费时又琐碎。于是,他写出下列的通式:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

这是决定性的一步。发展到此,原来恒等式里唯一可见的数目字也没有了。不再讨论  $a$  和  $b$  的二次方、三次方或八次方,而是  $n$  次方。

突然之间,我们进入一个新的境地。这仍然是简单的代数,只不过用一个神奇的  $n$  来代替具体的 2、3 等等而已。这个公式将许多数学处理步骤全省略了。有了它,只要你给我一个数,我就可以把对应的等式写出来。公式中间的省略号表示式子的前后两项决定后,这些小点所代表的各项只要照

着此种形式写就行了。例如  $n = 8$ , 用卡尔的通用公式, 看到  $n$  就写成 8, 看到  $n - 1$  就写成 7, 以此类推, 等式便可以自己写出来。

数学家们说, 含  $n$  的等式比前两个更通用。换言之, 前两个等式只是这通式的特例。假定拉马努金不知道这一概念——这是无法想像的——他一看也会明白。卡尔提供的陈述内容固然有用, 更重要的是他引导学生入门的方法, 让他们一步步地进入数学的新领域。

还有他所采取的证明方法, 与其说是证明, �毋宁说他告诉了人们可以不必证明。

事实上卡尔的书里并没有太多的证明, 数学家通常也没有那么多证明, 甚至还比不上我们在这里所介绍的证明。然而, 每一本标准的数学书, 至今都是一样, 先讨论某个命题, 立下一个定理, 然后一步步证明这个定理。学生应该能亦步亦趋, 领悟逻辑的推演, 有时还要补充某些细节。“所以, 下一步是……”, 学生在思考“对, 对……”

学数学不能被动, 不能像看小说, 稀里糊涂地照章全收。一定要主动去研究, 既要进取又要警觉, 和下棋非赢不可一样。仅仅跟随别人的证明, 自己不动脑筋就无法发挥自己的长处。例如拉马努金早几年读的《龙氏三角学》, 固然有其他优点, 但基本上仍然是一本叫你跟着做的教科书, 不引导你走自己的路。

卡尔的书则不同。

在这本《汇编》里, 没有篇幅来写证明的细节。有些结论仅仅提一提, 连解释都没有。有时只加个小注。例如书中的定理 245, 只说“由定理 243 和定理 244 可得”。就是说, 用定理 243 和 244 的逻辑就可以得到定理 245 的结论。在定理 2912 下面的注是: “将(2911)中的  $x$  用  $\pi_x$  取代, 证毕。”换言

之，数学家常用这个手法——只要把变量改头换面，便会得到更清楚、更容易看出的结果。总之，卡尔多半只指出大概的方向，很少把证明一步步详细地写出来。

总有一天，专家们会细读卡尔的书，希望能发掘这本书里到底是什么启发了拉马努金的数学灵感。他们也可能批评说哪些材料是怎样介绍的或是根本没有提等等。有些人会认为书中的索引非常有用，或者认为材料很丰富。

其实，要启发年仅 16 岁但在数学上早熟如拉马努金这样的人，比这本书更适合者是很少的。书中的结论常常是直接地说出来，似乎是向读者挑战，教他们钻进去自己证明。对拉马努金来说，每一个定理就是一个小小的研究课题，是一个要解的谜，要他一步步找出答案。就像流行杂志上所出的题目，用来估计你的创造力，或是估量你对异性的吸引力那样，使你难以抗拒。

这并非偶然，也不是因为《汇编》写得特别简洁而不得不如此。卡尔是有计划的，所以在序言里他说：

在许多情况下，我只介绍一下证明中的特色，有时只指出可以从中得到证明的相关定理……细读别人完全写出来的证明，和由自己找出全部或一部分的证明，两者对心智的影响之区别是很大的。就好比观光客到一个新地方或是没有去过的国家，只跟着导游跑来跑去，和自己拿着地图探路之间的乐趣大不相同一样。

卡尔连地图都没有给你，他只给你一句话：出了城门向左转。

一位对拉马努金的成就有相当了解的西方数学家后来评论说，《汇编》只给拉马努金提供了一个方向，而“与他所用的方法毫不相干，他的方法都是他独创的”。实际上，卡尔的书里根本没有所谓的方法，至少是没有详细的方法。所以拉马努金埋头在这本有 5000 多个定理的大书里时，很大程度上是

靠自己去创造自己的方法,且始终乐此不疲。两位替他写传记的印度作家说:“在这个为他敞开的新天地里,拉马努金遍尝欢乐。”

## 2. 南印度的剑桥

1904 年,拉马努金发现卡尔的书不久,就从市立中学毕业,进了贡伯戈纳姆的政府学院。因为成绩优良,得到一份奖学金。他在这里攻读所谓的文科一等学位(First Arts,简称 F.A.),相当于现在的准学士学位,可在那时的印度地位却要高得多。

这所学院离市中心要走 20 多分钟——沿着市立中学的那条街走到高韦里河边,再沿着河走到学院的对面。如今此地有一座桥,不过那是 1944 年以后的事。当时有一条小船摆渡,再不然就要游泳过去,三四月里游泳倒不太费事,因为河水很浅。

政府学院很小,教员不过十二三位讲师,所以当地最好的学生就开始去马德拉斯上大一点的学校。不过,它当时仍然是相当好的学校——竟然赢得“南印度的剑桥”之美名。它有和英国剑桥大学比肩的绰号,部分原因是校园离高韦里河很近,正像剑河流经剑桥大学一样。另一个原因是该校的毕业生在南印度生活中的地位。

1854 年,这所学院开始在坦焦尔女士邦主所捐赠的七地上营建。现在仍可以看到从更衣室走向河边的台阶,这是女士邦主出浴时所用的。从 1871 年起,既有的校舍开始修整扩大,增加新校舍。1880 年,取消了中学部,全部变成学院。校园也扩大不少,庭院的风景也美化了,增加了一座体育馆。拉马努金在学时还加了一座可住 72 位学生的宿舍,而且婆罗门

的学生有专用的饭厅。

校园所在地自然景色非常美。小桥流水，禽鸟飞鸣，绿阴如盖，藤蔓几乎爬满全部校舍。显眼的不是这些建筑物，它们几乎被大自然挤到一边去了，这里是一片美好的充满诗情画意的宁静校园。

这里也是拉马努金的学业第一次遭到挫折的地方。

像卡尔的《汇编》这样的书，对不用功的学生，或者对好学生会有什么样的效果，只能猜猜而已。可是到了拉马努金手里，它却激发出一股狂热专注的心智活动。在这以前，数学只是他生活中的一部分，他的能量和时间也花在别的活动上。自从得到《汇编》后，他坠入了纯数学的陷阱，对生活中的其他一切都失去了兴趣。只有数学，而且总嫌不够。“由于校规，他不能不去上历史课或生理学课，”E·H·内维尔(E. H. Neville，英国数学家，后来成为拉马努金的好朋友)后来写道：“但是他的心在教室外面，或者说他的心是他的天赋的奴隶。”

当老师们诵念罗马历史时，他就坐在教室里搞他的数学公式。“身边的事他毫不关心，”同班同学N·哈里·拉奥(N. Hari Rao)回忆说：“而且根本不听课，除了数学，其他全不感兴趣。”他教同学拉奥做“幻方”——在一个个方格里填入不同的数，使每个方向相加之和全相等；他做他的代数、三角和微积分；他弄他的素数，即一切数系的根基，寻找素数的模式。他从图书馆借了几本外文的数学教本，以他自己的方式居然也看完了一些。不论哪一种文字，书里的数学符号总是一样的。

数学教授塞舒·耶尔(P. V. Seshu Iyer)有时就让他在课堂上做他高兴做的事，甚至鼓励他去解答刊在伦敦《数学杂志》(Mathematical Gazette)上的数学题。一天，拉马努金把自己在

无穷级数上的心得给他看，耶尔先生评价说：“很妙，也很有独创性。”但是得到如此青睐的机会不多。故而拉马努金也很少有机会放纵他的天分。有一次，拉马努金曾向某教授借了一本微积分的书，可是这位教授看到他完全不做其他的功课时，就把书收了回去。这倒是常发生的情况。其实耶尔也可能并不如他回忆中所说的那么宠爱拉马努金。因为拉马努金曾对朋友抱怨耶尔对他很“冷淡”。

他曾经是“每一科都棒”的学生，可现在却不是了，因为他把该读的生理学、英语、希腊史和罗马史等等，全部置诸脑后。早在 1897 年，他小学毕业成绩拔尖，考的科目很多，包括英文在内，他每一科成绩都好。后来他所写的信，文字虽尚可意，但文采就很平常。就是他那著名的数学笔记，不用符号而用文字表述的部分也是这样。他在政府学院的英语作文居然不及格。“对校方来说，”内维尔后来追述说，“这个学生除了 - 门课程之外，其他科目完全不念。处罚是无可避免的：奖学金给取消了。”

他母亲当然大怒，就去见校长。怎么可以不给他儿子奖学金？他的数学无人可比，像他这样的学生从来没有过。校长很客气，可是也不让步。校规就是校规，她的儿子英语作文没有及格而且考得很差。事情到此为止。

奖学金对拉马努金来说并不只是表明他的身价，每学期 32 卢比的学费相当他父亲一个半月的所得。有奖学金才能免学费，所以他非要有奖学金不可。

他勉强维持了几个月，到校上课，以便在 1905 年 7 月拿到没有旷课的证明书。对他来说，这是件很难的事。大家都知道他已经没有奖学金，他也知道这对父母亲是很重的经济负担。他想每一门课都考好，可是又不愿意为了那些课而把数学丢在一旁，这使他左右为难感到很无奈。

他终于感到忍无可忍，1905年8月初，17岁的拉马努金离家出走了。

### 3. 离家出走

火车上敞开的窗口吹来阵阵热风，拉马努金凭窗遥望南印度的乡村以每小时25英里(约40千米)的速度向后移。村落里的草屋在风吹雨淋之下变成暗灰色；丛林里的小粉红花开得很艳，平坦的稻田中竖立着棕榈树。从远处看，轨道旁的人好似一根根棕色的小木桩，裹着白色的棉制缠腰布和头巾。妇女们穿得鲜艳些，橘黄色或红色的莎丽更衬托出了稻田的鲜绿。

这一切好像一幅优美的田园风景画，可是拉马努金所看到的是人人都在做工。男人要管牲口，女人弯着腰看管稻田。有的人单独做，有的是十几个一群，头上顶着竹篮，或是从小沟里提水。有些跟着妈妈的小孩向火车招手。火车把拉马努金带到北方的维沙卡帕特南(Vizagapatnam)。

有史以来，印度的交通工具：牛车或单匹马车(印度人称之为jutka)，全都出名地慢、路面又很坏。拉马努金时代，坦焦尔区的1700多英里的路面只有八分之一是“硬路面”，就是铺了点石灰或其他石块。两者之间差异很大。赶车的反要挑泥土厚或灰尘多的路走，不走这硬面路。因此载重和速度都减了三分之一。25英里(约40千米)的路程要走一天。

19世纪中叶兴建铁路改变了印度人的生活，这是英国统治时期工程上的最大成就。铁路使幅员广阔的印度紧接在一起。在南部，第一条铁路是1853年铺的，到1874年再从马德拉斯朝南延伸。在1892年，通维沙卡帕特南的支线尚未完

成，从贡伯戈纳姆到那里，坐火车、坐牛车再加上乘运河的船一共要花三个星期。第二年，工程完毕之后就只要一天。

铁路是最大的平等主义者，不论什么种姓的人都可以坐。“当你坐进三等车厢之后，什么不平等的障碍，连最难克服的种姓观念都一扫而空，”当时的一位英国作家这样写道，“同一车厢里，有婆罗门，也有最低种姓，挤在一起，坐在一样的座位上，和那些连影子都不许挡路的人摩肩接踵挤在一起，火车说：‘你要想走一英里路只花一分钟，就得忘记种姓’，于是种姓就被丢掉了，下了车再恢复吧！”

拉马努金是和火车一起长大的——小时候，他坐火车穿梭于贡伯戈纳姆、甘吉布勒姆和马德拉斯之间。到 1905 年的这一天，因为失去政府学院的奖学金，火车又帮他离家出走。

坐南印度铁路公司的火车从贡伯戈纳姆到马德拉斯有 194 英里(约 312 千米)。沿着海边到维沙卡帕特南还有 484 英里(约 779 千米)，这个城约有 4 万余人口，与孟加拉湾形成一个岬口，外号叫“海豚鼻”。它是南印度东岸唯一的自然港，故而发展得很快。羊毛和布匹从这里进口，锰矿和粗糖从这里出口。停船抛锚处附近新建了灯塔。工程师又计划疏浚河床建新码头。维沙卡帕特南真是生气勃勃。

拉马努金事前没有告诉任何人，就是要到这里来。从这个讲泰鲁固语的城市到加尔各答还有一半的路程。当时有些说法不一的零星记载，说他到这里来的理由是：同学的影响，找奖学金，找赞助人以及——在父亲的压力之下——找份工作等等。这些记载中常用的词句是“失望之余”，“出走”，“太敏感不愿让父母亲帮忙”等等。不论他到维沙卡帕特南是什么，显然他是在逃避什么。

有证据表明，他的家人对儿子失踪很担心，在报纸上登了寻人启事。他父亲甚至到马德拉斯及特里奇诺波利挨家寻

找。除此之外对拉马努金的突然出走再也没有别的详细资料。不久，大概是在 9 月里双亲又看到他安全地回到贡伯戈纳姆。

这是他多次“大失踪”的第一次。拉马努金好几次突然地不见踪影，并且人们事后也很少知道细节。但是，因为自尊心受损而突然有怪异的行为这倒不是第一次。

1897 年他 9 岁时，在贡伯戈纳姆市政厅有一次小学考试。算术部分的满分是 45 分，他拿到 42 分。另外一位同学 K·萨兰伽帕尼·耶恩伽尔 (K. Sarangapani Iyengar) 却拿到 43 分。这让他又气愤又伤心，竟然拒绝跟这个同学讲话。萨兰伽帕尼莫名其妙，认为没有什么大不了的事，想跟他和解，就说其他各门课拉马努金都得高分。拉马努金气呼呼地说，其他的分数不算——算术总是他得最高分，而这一次却不是，而且人人都知道了，这是无法忍受的，就一路哭着回家找妈妈。

后来，拉马努金念中学的时候发现，三角学可以用一种与直角三角形各边之比无关的方法发展出来，用各边的比来表达三角函数只是表面上的事。这是一个令人惊奇的发现。但后来他知道瑞士大数学家欧拉 (Leonhard Euler) 早在 150 年前就想到了这件事，于是就把他记下的笔记全藏到了房顶上。

青春时期的奇行怪癖对一位天才的一生有没有影响？可能没有。不过和后来发生的类似事件联系起来看，在公众面前哪怕受到最小的羞辱，他也有一种病态的过敏。几年之后，他因为过去的一位密友未再来信，就给这位密友的兄弟写信问：“是不是因为他考得不好而不肯写信？”显然他对这些事是十分敏感的。

对公开受辱的过分敏感，心理学家称之为羞辱感，它和罪恶感不一样。罪恶感来自做了坏事，而羞辱感来自自己的失

败和不良行为被人或可能被人揭发,例如犯手淫或偷东西被人发现。“被发现是羞辱感必有的方面”,马里兰大学的心理分析学家维尔姆塞(Leon Wurmser)在他的《羞辱的面具》(The Mask of Shame)一书里写道,“这种被人发现,通常或多或少是突然的暴露,或者是期望与失败之间的差异被突然揭发”,带来的感觉是一种突然的、尖锐的和无可避免的丢脸——你的失败暴露出你实际上是什么样的人,和你认为你是什么样的人有很大的差距,给你外在的形象留下污点。

并不一定要真的被发现,维尔姆塞说,只要想到可能被发现就会有羞辱感,“因为内心里知道自己不诚实,照镜子时都会对自己做鬼脸,甚至看不起自己……别人不一定会看到那污点——羞辱感却抛不开。”

羞辱感的最典型症状就是有脱逃的冲动。维尔姆塞写道,“躲开的念头是内在的,是和羞辱感分不开的”,患者“想躲,想逃,想把脸藏起来,想钻进地洞”。拉马努金面临着算术考第二名时就是这样的,他的发现是欧拉早已发现过的,他就把笔记都藏起来。这些就是他逃到维沙卡帕特南去的原因。有人说这是拉马努金这段时期的“心理失常”,也有人解释说是他“心理上暂时的不健全”。不论用什么解释,强烈的羞辱感触发了这件事。

很多年后,小学考试时失败过这件事留下的记忆,使他寻求一种保证,使奖学金不致因为另一次考试而离他远去。政府学院的事件又使他大大丢脸,几乎精神失常。他的反应,就是脱逃的冲动。他屈服于这种冲动,所以逃到维沙卡帕特南去。

作为一个数学家,他不像一般人那样常有知识上的盲从,他会随心所欲自由发挥,但他又非常注意一般人怎样看他,这是无法协调的。拉马努金对自己的数学才能绝对自信,

可是在人际关系上又过分妥协。如果说，别人在数学上走过的路他可以根本不追随，那么人家如何判断他所走的路，他却非常关心。

后来在英国，每当听到有数学奖时，他总不停地打听他能不能申请。对他来说，正式地、公开地承认不是一件小事；他也从来没有假装不在意。当英国给予他很高的荣誉时，他的回函总是充满兴奋的致谢词。

他是受尊敬的数学家吗？他是孝顺父母的孩子吗？他是一个好的婆罗门吗？他拿过重要的奖学金吗？他得过奖吗？这些问题的答案，是他是否成功，是否被接受的外在标志，他对此是很在意的——在他年轻而又过分敏感的时期，他更在意别人对他的看法。

从拉马努金年轻时的故事，看得出这个孩子可以在房子的前廊里做数学时，似乎一点都听不见其他孩童在大街上玩耍的吵闹声。钻到数学里，其他的全都忘了。可是有时他仍然需要归属感，渴求别人认同他的才华，别人不承认他就很痛苦。对人们的轻视的敏感，在另一个层面上表明他极为在乎这一点。

#### 4. 再试一次

帕协阿帕·马达利尔(Pachaiyappa Mudaliar)于1784年出生于乡下一个破落的家庭。他通晓两种语言，跟英国人做生意时少不了他做翻译。20多岁时就成了巨富。46岁去世，遗产全部捐给慈善事业。以他的姓氏命名的学院成立于1889年，只收印度学生，到1906年前后已具有相当的名气。校舍的建筑也名副其实，是仿雅典忒修斯(Theseus)神庙的高柱大殿建造的，位于马德拉斯繁忙的乔治城区(Georgetown)，时称

中国集市街的地方。

拉马努金就是要去帕协阿帕学院。1906年的一天，他抵达马德拉斯的爱格摩尔(Egmore)车站，疲惫不堪且人生地疏，就在候车室里睡着了。来了一个人，将他摇醒，带他回家，给他吃了一顿，告诉他去学院的路之后就叫他走了。

在印度，获得学院的学位不仅是找到好职业的先决条件，而且它保证你有好的就业起点。要得学位，不是凭你选了多少课，修了多少学分，而是看你能不能通过马德拉斯大学主办的考试。这不是一所有教授有学生的“大学”，而只是个考试机构。“年轻有出息的学子，最大的愿望就是能参加及通过这个大学的考试”，当时的一位英国作家这样写过。拉马努金有好些同学早就从贡伯戈纳姆的学院转学到南印度教育系统的皇冠宝石——马德拉斯的王公学院(Presidency College)\*，以便好好准备这最重要的考试。

然而，参加学位考试的人，绝大多数都是白费劲。先要参加注册考试——就是要有高中同等学历。但是更为人们企盼的文凭——有一半考不取。接下来的每一步考试也有相同的失败率。例如考帕协阿帕的文科一等学位，考不取的占百分之八十之多。1904年不到5000名男生和仅仅49位女生被该管区的各学院和其他专业学校录取。在4300万居民之中，每年能得到文科一等学位的不过千人而已。

18岁的拉马努金也想名列其中。贡伯戈纳姆的失败一年之后，他在马德拉斯又得到一次机会。

有一段时间，他住在离帕协阿帕学院几个街区的地方。那是他祖母的房子，在水果市场旁宽街(Broadway)的一条小

\* 英国统治时，马德拉斯是其所在辖区的首府，其最高长官可能就是王公之类，Presidency College是这里的最高学府，故译为王公学院。——译者

巷子里。房子又小又暗，空气也不流通。但是他至少又回到了学校。

拉马努金的新数学老师看了他的笔记之后，印象很深，亲自带他去见校长——校长当场给了他部分奖学金。虽然因为害痢疾而回到贡伯戈纳姆3个月，但是拉马努金在帕协阿帕学院的初期，似乎一切都很顺利。

有时，一个代数或三角问题，数学老师拉马努贾查亚尔(N. Ramanujachariar)要写满两黑板，演算十几步才得到答案。可是拉马努金走上前用三四步就算完了。“啊，怎么回事？”拉马努贾查亚尔有点耳背，常常这样问，拉马努金就再算一次。有时，老师讲到一半会停下来，面向拉马努金问道：“你看对不对，拉马努金？”这个来自贡伯戈纳姆的数学奇才，常常绕过问题，在心里将要紧的几步算出来，其他细节完全省略——让班上的同学如坠五里雾中。

学院里有一位资深的数学教授辛加拉维鲁·马达利尔(P. Singaravelu Mudaliar)是这所学院里难得聘到的好教授，以前曾在更有名气的王公学院任副教授，很欣赏拉马努金的才气，他们俩常常一同研究数学杂志上的问题。拉马努金若做不出来，便连夜请教授去做。一般情况下，教授也做不出来。

人人都赞赏拉马努金的才气，这不足为怪；但是他的才气没有给他带来任何好处则似乎是一件怪事，其实也并不奇怪——他在贡伯戈纳姆所经历过的，在帕协阿帕学院又再度发生。在政府学院让他倒霉的是英文，在这里，许多和数学不沾边的科目中，有一门生理学，这门课不仅乏味，根本是倒人胃口。

课本是一本小书，名叫《生理学入门》(Physiology for Beginners)。著者是两位剑桥的学生，福斯特(Michael Forster)和肖尔(Lewis E. Shore)，1894年出版。内容平铺直叙，如“胃的左

上方有个小口通食道，这是一根由嘴通到颈子，穿过喉头，通过横膈膜而进入胃的管子”。书中全是精细的插图，一只剥了皮的兔子，各个内部器官暴露无遗，一头羊的心，这是一页；另一页是人的口腔或舌头的解剖图。在 19 世纪后期，这就算是科学了。

和抽象高深的数学相比，这之间的差别是无法再大了。数学中清爽的几何图形如果可以视为古典艺术的话，生理学中的浓艳插图便是现代艺术了。对素食者拉马努金来说，这是个完全不合口味的世界。“取一只刚杀但尚未剥皮的兔子，”这是第三章的第一句，“将四肢钉在板子上，然后用一把尖刀或剪刀……”

拉马努金对这些描述的反应是带有羞怯的嘲讽——这可不合其性格。教授在解剖一只打过麻醉剂的大青蛙，一面热心地给学生讲解它和人类生理上的相同之处，可是拉马努金却忍不住要讲几句风凉话：青蛙肚里的蛇在哪里？——这是出自印度的传说，即人具有蛇之神力。另一次考试，问到人的消化系统，拉马努金在他的考卷中写了这样的话：“先生，以下就是我消化系统里没有消化完毕的东西。”教授当然知道这是谁的答卷。

不用说也知道拉马努金的生理学没有及格。除了数学之外，他每门课都考得很差，尤其是生理学特别差，连 10 分都没有考到。3 个小时的考试，他只要 30 分钟就交卷。这对他毫无益处。1906 年 12 月，他再去考文科一等学位，又没有及格。第二年再考，还是没有及格。

1904 年和 1905 年在贡伯戈纳姆的政府学院……1906 年和 1907 年在马德拉斯的帕协阿帕学院……20 世纪的第一个 10 年里，南印度没有一所高等学府可以容得下拉马努金。他是天才，这人人都知道。可是这位天才就是拿不到学位。

## 制度毫不留情。

英国作家赫伯特·康普顿(Herbert Compton)描写当时的年轻学子对学位的渴望时说：“僧多粥少的结果是产生了一大批‘志在必得’的竞争者——印度人用‘二流子’(omedwar)这个土语来形容他们——这些人游手好闲，等机会，或者做些和受教育的目的大相径庭的事。”1908年的拉马努金大概就是一个“二流子”。离开了学校，没有工作，呆在贡伯戈纳姆的家里浪费时光。

日子很艰难。有一天，他回到帕协阿帕，坐车去学校时一阵风把他的帽子吹掉了。拉马努金的梵文老师坚持说，脑后留有一束头发的男孩子一定要用帽子把头盖住，就叫他下车到店里去买一顶。拉马努金只好抱歉地说他身上连买帽子的几个安那都没有。(好几位同学，看他穿得破破烂烂，就凑份子替他买了帽子。)

拉马努金的父亲一个月赚不到20个卢比；一个卢比可以买25磅米。附近的农民一天只赚四五个安那，即四分之一卢比。所以好多人家比拉马努金还穷得多。可是用婆罗门的专业人士(拉马努金正想置身其中)的标准来看，他们算得上是近于赤贫。

家里收了两个寄宿房客，每个月可以多10个卢比的进账。柯马拉塔马尔在庙里唱歌，又多几个卢比。就是这样，拉马努金有时仍然吃不饱。有时邻居的一位老太太请他吃顿中饭。另外一家，他的一个朋友苏布拉马尼安(S. M. Subramanian)有时给他几块用豆子和面做的叫 dosai 的饼，这是南印度的主食。拉马努金的妈妈有一次到这位朋友家，说她开不了锅。她的朋友不但请她吃了饭，还叫她的另一个儿子去找拉马努金，带他来吃油拌饭。

拉马努金也赚点外快。他到朋友们家问要不要找人记账或是核对账簿？有没有小孩找人补习？他收了一个学生，名叫维斯瓦纳塔·萨斯特里（K. S. Viswanatha Sastri），是公立学院哲学教授的儿子。拉马努金替他补习代数、几何和三角，每月7个卢比。每天一大早，拉马努金步行到城市另一头索拉阿帕·木达利街（Solaiappa Mudali Street）的这个学生家里。他惟一的毛病是全不照规定的材料教。第一天他照标准书本教，学生第二天如果不记得了，他就临时按完全不同的教材讲，把学生搞得晕头转向，因为他讲的都是普通老师从未接触过的内容。

有时他又海阔天空大谈哲学。先是讨论墙的高度，可能本是一个三角问题，拉马努金却大谈高度是相对而言的，谁能确定对蚂蚁和水牛来说，高度是不是一样？有一次他又问，宇宙之初，在没有人看到它之前，究竟是什么样子？他又问他的学生和学生的父亲，假如用一根皮带紧紧地绑在地球25 000英里（40 000千米）长的赤道上，然后放松 $2\pi$ 英尺（约1.9米）长——那么这根皮带会离地球表面多高？是不是不到1英寸（约2.5厘米）？不对，是1英尺高。他很喜欢问这类问题。

萨斯特里认为拉马努金很有启发性，其他的学生却不以为然。有一位高中的同班同学戈文达拉贾·耶恩伽尔（N. Govindaraja Iyengar，他不是等闲之辈，后来做到印度公共服务委员会主席）为了要考学士学位，请拉马努金补习微积分，预计教两个星期。你可以认为微积分是很有用的数学工具，很多同学也这样想，而考试的目的也在此。也有人特别欣赏它处理无穷小量或无穷大量所引发的微妙问题。拉马努金可能是完全不顾学生的实际需要，也可能不愿意教这些，只在后一类问题上发挥。“他只讨论无穷小或无穷大，”戈文达拉贾写道，“我觉得他的辅导[教学]对我的考试无所帮助，所以我就

放弃了。”

拉马努金丢了奖学金，学位考不到，连他最喜欢教的数学也找不到学生。

他什么都完了。

然而从另一个角度来看，他什么都有了。如今再没有任何事来打扰他写数学笔记了——笔记里记满了公式，而且每天每星期都越变越厚。

## 5. 数学笔记

“每证明一个公式，他就发现了好些其他公式，于是他开始编写一本数学笔记”把这些结果记下来，这是拉马努金的朋友内维尔好些年后所写的。如今，大家都认为《数学笔记》就是这样诞生的。在 1904 年到 1907 年他在学院艰难读书的那几年，他一面读卡尔的《汇编》一面做笔记，这是其最早的雏形。

拉马努金去世后，他的弟弟写了一系列的手稿，记下一些事实、一些数据和他一生里的重要日期。这些资料仍然以原貌留存，使我们回忆起没有电子计算机的世界。如今文字处理程序使修订重写都容易多了，于是我们看到了原来乱涂乱画的符号，经过一次次复制再复制，变得更加清晰，经过整理和改进的后来那些版本。

这就是拉马努金的《数学笔记》的《创世记》。

如今已出版的《数学笔记》中，我们看到的第一册大约是 1907 年拉马努金离开帕协阿帕学院时所记的。后来有人说，用的是一种“很奇怪的绿色墨水”，共 200 余页尺寸很大的纸，全是超几何级数、连分式和奇异的模公式。

但是《数学笔记》第一册并不是杂乱无章的笔记。后来补

充修订分成两册，每册分好几章，各章讨论的主题不同，定理都顺序编号。可见拉马努金曾把原稿再看了一遍，经过润色以供人翻阅或借此找工作。就是说，它是经过编辑的。很少大错，那是因为拉马努金早就把错挑出来修正了。一般说来，每页 15 行或 20 行，字迹都很清楚，用不着眯了眼来猜。这不是即兴之作，更不是乱画乱写，而是仔仔细细写的，几乎像博物馆的说明书一样，引导参观者欣赏排列在标识清楚的画廊里的艺术家的作品。

可能开始时他就有心于此。最初，拉马努金很有系统地进行，每章都分得很清楚，也只写在纸的一面。但是耐心似乎终于不能维持下去。先是开始用纸的反面写草稿，或是记下还没有分类的结果。这种零星的杂记日渐增多，后来是比较随兴所至了，笔迹也变得潦草，写了的又画掉。有时竟然不横写而竖写。我们似乎看见拉马努金一面写一面又在发誓，要把这本笔记写得干干净净……有时脑子里闪过一个念头，手边没有草稿纸或石板，就写在笔记本的空白地方——我们所得到的就是这些用纸笔表达的无声的念头。

在这些作品中，我们可以猜想到，现在所见印本之前的数学笔记雏形。拉马努金本来是要证明卡尔书中的定理，但后来就把这位远方的导师抛在后面了。经过试验，他找到一些新定理，走到了卡尔从来没有去过的领域——其实是谁也没有去过的地方。当头脑里形成新的定理时，他就把每天的所得记录下来。经过好些年，这些胡乱写下的东西印成了书：就是他的《数学笔记》。如今，研究他的笔记倒成了一些数学家的小小的专门行当。

早在拉马努金念书之前，下面这个问题已出现在印度的数学课本中：

有两只猴子到果园里偷水果，偷的香蕉比番石榴多3倍。正要开始饱餐之际，看见受害的园主提着棍子悄悄走过来了。它们一算，他要 $2\frac{1}{4}$ 分钟才能走到。有一只猴子1分钟可以吃10个番石榴，所以只要 $\frac{2}{3}$ 的时间就可以吃完番石榴，然后去帮另一只猴子吃香蕉。正好准时全部吃完。假如第一只猴子吃香蕉比吃番石榴快一倍，请问第二只猴子吃香蕉吃得多快？

教育家们认为，这种问题可以给枯燥无味的数学注入新的色彩和生命。有时问题会改头换面，猴子变成狐狸，番石榴变成葡萄。这一类问题，尽管求解也很费事，到底只是雕虫小技，与拉马努金笔记里的数学毫不相干。

拉马努金的兴趣用不着吃番石榴的猴子来启发。对他来说，一个方程所代表的内涵不如方程本身的类型和式样那么重要。他的乐趣不在于找到数字答案，而在于能不能把这些方程上下颠倒里外互变，寻找新的可能性，正像诗人字斟句酌，画家调色勾线，哲人沉思冥想一样。

在拉马努金的世界里，数字有着与生俱来的性质。学化学的人要学每个元素的性质；它在周期表中的位置，它所属的类，以及其原子结构所带来的特性。数字也一样有不同的类别和范畴。

初学者都知道：数字有偶数，如2, 4, 6等；有奇数，如1, 3, 5等。

接着，有整数，如2, 3, 17等；有非整数，如 $17\frac{1}{4}$ , 3.778等。

4, 9, 16, 25等数是2, 3, 4, 5各数自乘而得，它们是“平方数”，但3, 10和24就不是。

6和5不一样。6可以用2和3两数相乘而得，但5只是

1 和本身的乘积。数学家称 5 以及类似的数(如 2, 3, 7, 11 等)为“素数”，而 6 以及用素数相乘而得的数为“合数”。

然后有“无理数”，它们不能用整数的比或分数来表示，例如  $\sqrt{2}$ ，它的近似值是 1.414…，这个小数不论延长到多少位永远只是  $\sqrt{2}$  的近似值。其他的数如  $3, \frac{1}{2}$  和  $9\frac{11}{12}$  都是“有理数”。

另外还有  $-1$  的平方根，这些数似乎是不可能存在的，是不合常理的。照数学公约，一个负数乘另一个负数应该是正数。怎么会有一个数自乘之后变负数呢？普通的数当然不会，所以它就称为“虚数”，并且用  $i$  代表； $\sqrt{-16} = 4\sqrt{-1} = 4i$ 。这类数也可以像其他的数一样运算，而且在空气动力学和电子学中很有用处。

这种情形在数学中常常发生。一个概念，乍一看是随便规定或微不足道的，有时几乎与常理相悖，后来却发现它在数学上的深意及重要的实用价值。在数学的萌芽时期，一向看惯了 1, 2, 7 这类的数，一旦接触到  $-1$  或  $-11$  等负数，一定很不习惯。其实这并不难接受。让我们用  $t$  代表温度上升之值，但是温度却降了 6 度。我们不能说  $t = 6$ ，因为这是表示温度上升 6 度；于是  $-6$  这个数乃应运而生。用相同的模拟法，虚数以及其他看上去随便规定的或奇怪的数学概念也就顺理成章了。

拉马努金的数学笔记涵盖了一很大的一片天地。但基本上全是“纯”数学的天地。这些数学以后总会用在什么地方，但拉马努金可没有考虑过实际的应用。看到猴子和番石榴的问题，他可能会一笑置之，但是我们可以确切地知道，他从来不会想怎样使南印度的稻米增产，或改良灌溉系统，或是让理论物理学的基础更稳固。这些是“应用”数学。

他是为数学而研究数学。拉马努金好似一位艺术家，他

用的媒介是数以及表示数之间关系的数学语言。

拉马努金的笔记也是他个人癖性的记录。在这些笔记里，连最常被众人接受的名词也会另有新意。例如，“例子”通常是用来说明某个原理的，可是对拉马努金来说它常常是一个新的定理，一个“系”——本来是可以从某一个定理自然地衍生，用不着证明的推论；但他的“系”有时却是必须证明的某种推广。至于他使用的符号，常常跟别人用的全无相似之处。

在数学里，表达式里用  $x$  或用  $y$  并没有一定之规，数学公式本身固然有重要的意义，但它的表示方法——用什么字母或什么符号代替哪些东西——却是完全自由的。当然在一些成熟的分支里，有些符号几乎是固定的。举例来说，如果有一位数学家在开辟新的领域时，用希腊字母  $\pi$  代表了某个变量，天长日久，习惯成自然，便一直沿用下去在数学文献中成为定规。

我们用高中代数里一个常见的二次方程（也是代表抛物线的方程）的求根公式为例：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

式中的  $a, b, c$  是常数， $x$  是变量，这个公式一直是这样写的，几乎不会想到有另外的方式。但是，没有理由说常数不能用  $p, q$  及  $r$  或者用  $m_1, m_2$  或  $m_3$  来表示。根号里的量可以看作是两个平方之差而写成两个因子之积，平方根可以写成分数指数，同时每一个根各用单独的式子。如此更改之后，得到：

$$x_1 = -\frac{m_2}{2m_1} + \left[ \frac{(m_2 + 2\sqrt{m_1m_3})(m_2 - 2\sqrt{m_1m_3})}{2m_1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = -\frac{m_2}{2m_1} - \frac{[(m_2 + 2\sqrt{m_1 m_3})(m_2 - 2\sqrt{m_1 m_3})]^{\frac{1}{2}}}{2m_1}$$

经过这一段数学演算之后,结果和典型公式仍然一样,只不过一下看不出来而已。有人别出心裁,用不常见的方式写出来,那是因为他没有见过已经建立的常用形式,结果是让别人无法理解而被判断为不合规则或莫名其妙。

拉马努金的数学笔记,在当时以及现在都被数学家们如是观。在椭圆函数里,人人都用  $k$  代表模这个重要的常数,而拉马努金却用希腊字母  $\sqrt{\alpha}$  或  $\sqrt{\chi}$ 。在他的笔记里  $\pi$  被用作连续变量,专业数学家却从来没有这样用过。还有  $\pi(x)$ ,它本代表不大于  $x$  的素数总数,他的笔记中却从来没有出现过。

拉马努金所做的并没有“错”,只是“怪”而已。拉马努金不跟别的数学家来往,没有读过上个月的《伦敦数学会会刊》(Proceedings of the London Mathematical Society),他不是数学圈子里的一员。直到如今,学者们提到他的结果时总要先加上“照拉马努金用的符号”或“用当今的符号讨论拉马努金的心得”,以及类似的语句。

他好似进化主流之外的变种,如同澳大利亚的食蚁兽和加拉帕戈斯群岛的乌龟一样,他仍然拥有自己生物学上的地位。

拉马努金数学笔记中所排列的符号,对数学家来说是不合常规的,对外行来说简直就是外国文字。数学语言固然晦涩,但是所要表达的数学观念却是惊人地明白易晓。

例如,  $f(x)$  及“函数符号”的其他例子,在笔记中处处都是。 $f(x)$  不是  $f$  和  $x$  相乘,而是  $x$  的一个没有明说的函数,即

随着  $x$  而变的量。不对此函数下定义，我们就不知道它是如何随  $x$  而变的。一旦关系确定，比如  $f(x) = 3x + 1$ ，由此我们就知道它如何随  $x$  而变了。这个代数式确定了函数的数学行为：当  $x = 1$  时， $f(x) = 4$ ；当  $x = 2$  时， $f(x) = 7$  等等。在很多场合下，数学家不希望钉死在特例上，所以用函数的方式来表达较为抽象的关系，可以不受特例的限制。

函数符号  $\phi(a, b)$  表示一个未定的关系  $\phi$ ，它随着  $a$  和  $b$  而变。 $f(3)$  表示  $x = 3$  时， $f(x)$  的值； $g(-x)$  是说把  $g(x)$  中的  $x$  换成  $-x$ ，若  $x = 1$ ， $-x$  就等于  $-1$ ；若  $x = 2$ ， $-x$  就为  $-2$  等等。数学家就用这种以一概万的手法，不被特定的例子所限，创造出自己的天地。

有时拉马努金用  $f(x)$  去代表特定的函数，进而发掘它的特性。在他的笔记第一册第 75 页，他对于已定义过的某函数  $\phi(x)$  写出如下形式：

$$\phi(x) + \phi(-x) = \frac{1}{2} \phi(-x^2)$$

从而指出他曾定义过的这个函数的特性。

令  $x = \frac{1}{2}$ ，及  $x = -\frac{1}{2}$ ，算出  $\phi(x)$  的对应值后两者相加，所得的结果应该等于此函数当  $x = -\frac{1}{4}$  时的值的一半。拉马努金的公式把这个特性表示得更为广泛，揭开了此函数的数学本质，而且言简意赅。

这正是拉马努金及其他数学家之所以要用这些看上去很奇特的语言的原因——就是要长话短说。拉马努金数学笔记第一册第 86 页以及其他地方，使用希腊字母  $\Sigma$  时，意思是说“各项之和”。例如下面这个符号：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

就是说“将每个  $x$  的  $k$  次方用  $k$  除后再相加,  $k$  的值由 1 到无穷大”。意思是说“看到  $k$ , 先用 1 代之, 再用 2 代之, 两者相加……, 永远不停地加下去”。数学表达就是:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

把一些简单的意思罩在奇怪的符号下, 这在数学中比比皆是。你想表明各项是正负交替吗? 很简单, 用  $(-1)^k$  就行了。 $k$  用一个个整数依次代入时, 各项前的符号就是正负交替, 那是因为负负得正, 正负得负。或者你只想给出奇数如 1, 3, 5, 7 等等, 用  $2n+1$  就可以了。当  $n=0$  时,  $2n+1$  等于 1; 当  $n=1$  时,  $2n+1$  等于 3; 当  $n=2$  时,  $2n+1$  等于 5……

简单, 快速, 明了。

如果没有学过英文, 当然不会用英文写求职信, 更写不出莎士比亚的名剧《李尔王》。但是即使懂得英文也不足以写出莎士比亚的剧本。拉马努金的数学笔记也是一样, 那一页页潦草的数学符咒并不难以辨认, 对专业数学家而言, 符号是最容易懂的部分。然而, 就像《李尔王》中的英文单词都能认得一样, 要花的功夫是弄明白它讲些什么。

下面这些事都要花功夫——把数学实体表示出来, 对它实行运算, 找出特例, 将已知的定理用在新的领域里。但是在数字计算上也得花些功夫。“每个有理数都是他的朋友”, 有人曾经这样讲拉马努金, 他爱数字正如爱他的朋友一样, 喜欢和它们打成一片。

甚至在正式出版的笔记中, 你都会看见好些别人可能只做抽象处理的地方, 他也一一填入数字, 让人对此函数的“动向”有所领悟。有许多页, 整面都是些  $\Sigma$  和  $f(x)$ , 加上许多 61、3533 等数, 看上去不太像数学论文而像四年级小学生的课

外作业。可以说是数字加工，他可是不遗余力地苦干。研究拉马努金的学者威尔逊说，拉马努金在讨论数论时“常常先列出一个很长的数字表来说明结果，表的长度让很多人望而生畏”。

“很多人望而生畏”，这是赞赏，可是也有点贬义——好像说拉马努金和别人一样也会向数字折腰。其实，拉马努金所做的正是每个艺术家所常做的一一全心投入他的素材。他是在构建数字之间的密切关系，正像画家老在混合他的颜料，或音乐家无休止地做他的音阶练习一样。

他的洞察力也因此获益。像一位研究生物的人，别人看不见的他可以看见，因为他整夜都守在实验室里观察。他的朋友后来追忆他如何简练地去解中学数学，中学生感到最难的问题他马上能看出来。拉马努金如今所做的问题对他自己而言之艰难，一如那些中学难题对中学生而言一般。他的成就不只是靠一瞬间的灵感，还有艰苦的工作。好几次开始都不对头，这是很花时间的。

学校考不及格之后，他有的只是时间，这真是一个绝大的讽刺。

## 6. 神 的 旨 意

从拉马努金最后一次未通过文科一等学位考试的那年——经历了僵化的印度教育制度对他的迫害那年再往前推100年，即1807年，曾在印度当过翻译、法官和政府官员的英国人威廉·萨克雷，在他的《卡纳拉、马拉巴尔和策德三区的政情报告》(Report on Canara, Malabar and Ceded Districts)中写道：

在英国，将国土的大部分产出分配给富有的家庭是很恰当的。如此，它们可以给国家带来议员、圣者和英雄

以保卫国家的利益。换句话说，一切生产的纯利，大部分应该分给高贵的人，让他们在国会里、军队里、科学部门里工作或从事其他的自由职业。这些财富造就了他们，他们就有闲暇、独立自主和崇高的理想，而这正是英国荣耀富强所必须的。祝他们能永远享受这些。但是在印度，财富所带来的理想、独立和深刻的思想则应该加以抑制。这些与我们的利害和权力相违背。由于事情的性质和以往的政府经验可知，对此不必多谈了。在印度我们不需要将军，不需要政治家，不需要立法官员，我们只要辛勤的农夫。如果我们还想要那种不安分、有野心的精神，仅仅马拉巴尔一个区就已经太多了。

萨克雷的报告是否反映在英国为印度订立的教育制度上，拉马努金就是一个最好的例子。办大学的目的似乎就是为了不让他“有理想、独立自主和能深思”。说实话，印度的高等教育无法培养他这样的无可置疑的天才，正说明官僚制度中的政策和规定有多大的影响力。许多人，作为单独的个人，都赞赏及尊敬拉马努金，但整个制度却使他无立足之地。设计这个制度就是要造就一批明智的、什么事都肯做的年轻人来帮助英国主子统治这个国家，而不是培养萨克雷报告书里所写的那些“不安分、有野心”的人。

换个角度来看，至少 1904 年到 1909 年这 5 年里，拉马努金一直是在苦撑——没有学校可进，没有学位，没有工作，和别的数学家没有联络。

是好还是坏？

E·T·贝尔(E.T.Bell)在他的《数学精英》(Men of Mathematics)一书中说过，19 世纪的大数学家雅可比(Karl Gustav Jacob Jacobi)认为应该把年青的数学家“扔进冰水，由他们自己学会游泳，或者淹死。很多学生一直要到掌握了其他人做过的，与他们的问题有关的一切，才肯试着靠自己去工作，结

果是只有极少数人养成了独立工作的习惯”。

拉马努金泡在冰水里好多年。困难的生活，学识上的隔离对他有好处吗？这会更启发他的独立思考能力而增进他的才智吗？在印度绝没有人这样看，但是效果的确如此。学校的失败使他不照常规发展，摆脱了所有社会的拘束，因此没有走发展的老路。

整整 5 年，拉马努金独立研究数学。没有人指导，没有人鼓励。除了当家教每月赚几个卢比之外别无收入。他虽然是家里的负担，可是家人倒没有不鼓励他——至少没有制止他这样做。印度这地方有空间容纳孤独的天才，正像可以容纳神秘主义者或方外之人（遁世者）一样。他的朋友，他的母亲，甚至他的父亲都对他相当宽厚，没有逼他去找工作或做其他的事。如今回顾拉马努金的早年，内维尔总是说起“1909 年前那无忧无虑的好日子”。其实，从某种角度来看也正是如此。这是他收获硕果的时期。他在数学里找到安身之处，这里是如此舒适，让他留连忘返；在这里他的才智、美感、情感都得到满足。

除此之外，有证据表明他有很好的灵性。后来的事态表明，在拉马努金心里，数学和形而上学同时出现，并且密不可分地交织在一起。有一次，当他还在帕协阿帕学院做学生时，他曾对一位生病的同学家长警告说最好把孩子挪开，他说：“当时间和空间在某点交会时，死亡便会出现。”另一次，他在梦中看见一双流血的手在一个布幕上画出椭圆积分。

有一个拉马努金百讲不厌的念头是关于  $2^n - 1$ 。有一个朋友记得他说过，这个式子代表“始初的主和神。当  $n$  是零时，这个式子等于零，这是虚无；当  $n$  是 1 时，这个式子等于 1，这是万物归一，也就是无限之神；当  $n$  是 2 时，这个式子代表三位一体；当  $n$  是 3 时，这个式子等于 7，代表七圣母

(Saptha Rishis), 等等”。

形而上学的思辨似乎很适合拉马努金的胃口。在贡伯戈纳姆有一位体育老师萨蒂亚普里亚·拉奥(Satyapnya Rao)，脾气极坏，连最能容忍的南印度人都吃不消。他有时站在高韦里河边，盯着太阳发癫，发作得最厉害的时候要用链子捆起来。大多数人都视而不见，拉马努金却不然，还时时给他送饭。大家以为他这样宽待此人一定是有神经病。不错，拉马努金说此人眼有所见，看得见极细小的物体。他认为这是拉奥前世修来的福分。被人看作疯人怪行的东西，他却认为是对宇宙的非凡灼见。

后来拉马努金到了英国，想围绕零和无穷大建立一个理论。他的许多朋友都不了解他到底在做什么。这个理论似乎说0代表绝对的实在，而无穷大，或 $\infty$ ，乃此实在之无穷的外相。两者的乘积 $\infty \times 0$ ，不是一个数而是所有的数，每一个数代表创造天地时的一个步骤。在哲学家看来或许是有点愚蠢，而在数学家看来简直是无稽之谈。拉马努金却认为很有意思。马哈拉诺比斯——就是那位发现他在剑桥大学宿舍里冷得发抖的朋友——后来写道：“拉马努金每谈起哲学问题就那么起劲，我想他在建立哲学理论上所得到的乐趣比证明数学上的推测要大得多。”

西方有个很古老的争论，就是数学是数学家造出来的实体，还是本来就有，只不过又被数学家发现而已。拉马努金是属于后一阵营的。在他看来，数及它们之间的数学关系只不过是给人类的一些线索，说明这宇宙是怎样结合在一起的。每一个新定理就是这未被探索的无涯中的一点一滴。后来他对一位朋友说过：“一个方程如果没有神的旨意则对我全无意义。”他讲这话既不是犯傻也不是矫揉造作。

## 7. 适 可 而 止

拉马努金 20 岁时就发胖，他一生都胖。他身材粗短，胖胖的脸上有点稀疏的麻子，一个大鼻子，没有胡须，前额刮得光光的，点上红的和白的种姓标记。满头黑发，梳到脑后结成大髻，让他看上去更显得圆滚滚肉乎乎的，比实际情况更强壮。

但是这粗大的身躯丝毫不笨拙。倒像相扑高手或一尊佛陀，不过轻快得多，甚至可以说是灵敏。走起路来，昂首阔步，身体稍稍前倾。手臂很长，手掌柔软，细长的手指讲话时不停地动来动去。

他一激动，话就不停，甚至吃得津津有味时也讲个不停，满嘴东西仍要把想法或笑话讲完。黑眼睛闪闪发光，即使全身都看不见，也能看到他眼睛的亮光。

有时他会回到把他撵走的学院里去借书，去看他的教授，或是去听一次演讲。他也常常到寺院去。可是大多数时间他就坐在三尼第街他家外的前廊里，盘着双腿，膝盖上放着石板写个不停，完全不在意石笔的摩擦声。街上的喧哗、成队走过的牛群、穿着花花绿绿莎丽的妇女、半裸的车夫，都进不了他那恬静的小天地。人群熙攘，与他擦肩而过，他却依然保持孤独和自由；他不想参加的考试、不想读的课程再也不能打扰他了。

《印度教徒报》(Hindu)是南印度最早的一家英文报，1889 年的一篇社论中说道：“印度人的个性中向来不缺少所谓的消极美德。耐性、忠诚、温顺处处可见。这么多年来，不论哪个部门，印度就没有过像戈登(Gordon)、加里波第(Garibaldi)或华盛顿(Washington)似的大人物出现。”它接着说，“印度所要

的是鲜明的个性，为求成功而牺牲一切的决心。”拉马努金外表上好像对世间的成功全不在意，但他的内在气质正是这篇社论所要找的模范。

为求成功而牺牲一切，这只会造成痛苦的一生，至少是缺少心理平衡的一生，争强好胜、锋芒毕露的一生。好些时候，拉马努金坐在家门口的走廊上瞪着眼睛看街上的孩童玩游戏，邻居们常说他的眼光是“空空的”，其实他的内心却像有火在燃烧。

当他努力思索时，他的脸都会紧缩，眼睛眯成一条线。想通什么时，就自言自语，又笑又摇头；做错什么时，着急得石笔都来不及放，双臂抱着身体乱动，用手肘来擦石板。

拉马努金解决手上的问题时，不是那种冷静、稳健又庄严的智者，而是充满了强力和激情。

这年轻人整日呆在家里，两所学院将他撵走，没有工作。老想些别人不懂的怪念头或谁也不去做的数学。他的工作对人有什么价值？他可能是天才也可能是怪人。不论是何者，为什么在与日常生活全然无关的事情上耗费时光？他的父亲虽然只是丝绸店的小职员，难道对这世界和他自己的贡献不是还要大些吗？

很久以来，他的双亲放任他为所欲为，最终也失去了耐性，到了最后的极限。应该适可而止了，他母亲终于下了决心。1908年的下半年，她就实行印度心理学家阿西斯·南蒂(Ashis Nandy)所谓的“百试不爽的印度心理治疗法”——给他找个老婆。

## 第三章 寻求赞助人 (1908~1913)

### 1. 佳 娜 琪

1908年末的一天，拉马努金的母亲到贡伯戈纳姆之西约60英里(约96千米)的一个小镇拉金德兰(Rajendram)去看朋友，在那里一位眼睛明亮的女孩的身影在她眼前闪过。姑娘是佳娜琪(Janaki)，是一位远亲的女儿。她去讨了女孩的天宫图——在印度这是说亲的第一步——再把她儿子的天宫图写在家里的墙上，和女孩的对照，认为很合适，这将是一个美满的婚姻，便开始商谈拉马努金和佳娜琪的婚姻。那时佳娜琪才9岁。

这个婚姻很容易凑合，两家都不高的社会地位相去不远。佳娜琪中等容貌，不是那么矜持难近。出生在一个很详细的地图上才能找到的小地方，许多地图上都找不到。父亲做首饰加工品的供应商，家道曾好过一段时日，以前也有点家产，如今，家道中落没有多少嫁妆，最多是些光亮的铜器而已。他们不能太挑女婿，况且佳娜琪是5个女儿中的一个(她家只有一个男孩)。最要紧的是，要找这样一个婆家，在女儿没有生儿育女之前，婆婆要能善待她，因为她要在婆婆的监督之下做家务事，并且要绝对地服从。

其实，拉马努金也不是金龟婿。表面看来，他没有学位，没有职业，是个没有前途的无业游民。佳娜琪对这位未来的

夫君毫无所知。结婚前，她连面都不能见。他不过是普通家庭里的一个普通男子而已。她后来说，好像她的父母听柯马拉塔马尔夸奖过儿子是数学天才什么的，她却连一点印象都没有。

对柯马拉塔马尔来说，一切都成了定局，对拉马努金全家来说也是如此。可是当她的丈夫斯里尼瓦萨听到之后，则大为生气。坚持说他儿子应该可以找到好一点的媳妇。贡伯戈纳姆有好些人家都乐意招进这位好女婿。事实上，两年前当他在帕协阿帕学院念书时，甘吉布勒姆就有一户人家来提过亲，不幸女家有了丧事就吹了。最让他父亲难过的是他毫无插嘴的余地，而且也无法发泄。第二年7月，该去拉金德兰办喜事时，他就呆在家里不去。

这种事男主人不出场是很不寻常的。父母之命的婚姻，新郎新娘毫无发言权，到处都是这样。为未成年的女孩指婚也是如此。这些女孩多半还不到青春期就给说了人家。当然她们不跟丈夫同居，很久之后才行夫妻之实。这种习俗，欧洲人都不以为然。英国人一向尊重各地的风俗，就不加干涉。1894年，迈索尔区通过一项法令，8岁以下的女童不准成婚；同样的法令在马德拉斯就没有通过。

一场喜事要办四五天，张灯结彩，锣鼓喧天。地方上的经济都受婚礼的场面和消费影响。有的人花半年的收入都不当一回事。连最穷困的人家，花起钱来眼睛都不眨——平日一点一点的省，向放高利贷的人借——替女儿办嫁妆，买新莎丽，付婚礼的酒宴喜乐等一切开销。

拉马努金的婚礼上有两对新人结婚，佳娜琪的妹妹也在同一天出嫁（当年12月发高烧去世）。妹妹的新郎准时出席。可是婚礼的前一天，一直到夜里拉马努金和他的家人却一直没露面。佳娜琪的父亲兰加斯瓦米（Rangaswamy）对这门亲事

本来就不热心，佳娜琪便听他父亲说，如果拉马努金再不马上出面，他们就要当时当地把她嫁给别人，或许就嫁给他他的外甥。

从贡伯戈纳姆到库利塔莱(Kulittalai)的火车晚点好几个钟头，这是到拉金德兰最近的火车站。拉马努金和他妈妈再坐牛车到达女家已经是半夜以后。佳娜琪的父亲忍无可忍，他大发雷霆，一定要取消婚礼。但是柯马拉塔马尔，用她超人的说服力问他，一位有五个女儿的人，一旦机会上门是否就不该犹豫不决……

最后当然还是她占上风，女家终于在夜里一点钟开始接待。接着是行所谓的 *kasi yatra* 礼，即新郎装模作样表示不注重生活上的享受，甚至要动身到北部的圣城贝纳里斯(Benares)去，出家做一个遁世者；没有走多远，女家就恳求他回来，并替他洗脚祷告；最后，在 7 月 14 日，佳娜琪又行七步礼(saptapadi)。这就表示不能再毁约了。

这场婚礼里发生了一些小意外。拉马努金和穿着漂亮莎丽的佳娜琪照传统坐在秋千上听歌手们为他们唱小夜曲时，突然跑来一个有智障的女孩，一阵狂叫搅乱了这温馨的时刻；过一阵，佳娜琪给拉马努金戴在脖子上的花圈又掉到地上；最后，在款待鼓手和歌手们的时候，帐篷的一角又烧起火来。虽然当时就扑灭了，但大家都认为是坏兆头。

从头到尾，坚强的柯马拉塔马尔一直保持她的喜气洋洋，她这不屈不挠的精神赢得了人们的同情和不小的惊讶。

最初，拉马努金的婚姻，至少在表面上对他毫无影响。佳娜琪三年内不能和他同居，要等到青春期之后。她来到贡伯戈纳姆住在男家很短一段日子之后，就回到拉金德兰她自己的家，跟她母亲学烹饪及其他家事，同时要再度学习应对公婆

和丈夫的礼数。

虽然外表上没有什么变化,但是拉马努金进入了一个新的阶段。印度教教义认为,人生要经过四个行期:第一是梵行期(brahmacharya),此时你是一个学生,敬事师长,学习宗教的或智能方面的知识。第二是住家期(grihasta),这个阶段为期最长,你是一家之主,要负起对家庭的责任。第三是所谓的“林栖期”(vana prastha),你要能抛掉世俗的一切纷纭,在独处的生活里内省自己的存在。最后是遁世期(sanyasi),你要能完全出世——置家庭、财产、一切于不顾,只求精神上的满足与解脱。在婚礼上,拉马努金按仪式习俗装做要去贝纳里斯出家,进入第四行期。事实上,他如今是进入了“住家期”。他有了新的责任,他有了妻子,他父亲快要50岁了。他不再是自由自在的人,不能只在数学里自得其乐,要开始做成年人了。

可是如今身体又有点小麻烦,后来发现的一些记录只模糊地说“肾有毛病”,其实不那么简单,实际上是发水肿,阴囊肿得很大。

水肿本身不是病,只是某种病变引起的体形的变化。阴囊的吸水率不平衡就会导致水肿。血丝虫也会引起水肿。这是由蚊虫传染而得的淋巴系统病,在南印度十分流行。还有一些其他的传染病,例如肺结核,也会引起它。一般说来,事前并无病症,甚至没有性的病症。有些人水肿好几年,一直肿到网球那样大觉得不方便了,才知道非动手术不可。手术也很简单,只要将阴囊刺破,把积水放掉就好了。那个部位血管很多,所以恢复也很快。即使卫生条件不好的地方,也很少感染。

不过有个问题,他家里没有动手术的钱。柯马拉塔马尔就找朋友帮忙却没有人肯援手。直到1910年的1月,一个名

叫库普斯瓦米(Kuppuswami)的医生自愿免费为他动手术。麻药打了以后,一位朋友事后追述,拉马努金只记得五种感官先后失去感觉。

拉马努金躺在床上好一段时间。有一天,急于要动动他的腿,便和他的朋友步行到城外几英里路的小镇,不幸伤口又流血。复原之后,休息了很久,又想再动,便走出门廊到外面活动了。

自从得到卡尔的书之后,凡是能使他和数学离开的事物——学校、家庭、朋友——他都置之不理。在那一段时间里,他能排除一切干扰,一心一意地只追求数学女神。但是六年以后的现在,必须回到正常的社交生活圈子里。可以想像得到,他母亲的手在后面操纵一切。她自觉或不自觉地意识到,如果他儿子以后要有所作为,现在就必须和外边的世界发生关系,结了婚的他也非如此不可。不管怎么说,事情必然是这样,拉马努金如今是成人了,情愿也好不情愿也好,他不得不放弃那种呆在家里,置身于社交圈外的生活。

## 2. 沿门挨户自我推销

拉马努金现在不再追求奖学金,甚至连成为数学家的机会也不去找,他要找份工作,给将来找个机会,找一个活命之计。接下来的这两年,他那命定的境遇,迫使他跑遍了南印度。先是以贡伯戈纳姆为基地,然后逐渐转移到马德拉斯。

他又一次乘火车旅行,但是常常要靠朋友或好心人资助车票。对英国人来说,来回的头等票都不算回事。可是对拉马努金来说,坐拥挤的三等车到马德拉斯的来回票,虽然每英里只要大约四分之一安那,但那就是他父亲一周的薪水了,可以买一百磅米。

刚开始，他根本无地可宿，只有到朋友家去挤。有一次，他到了朋友家，希望能借宿，他朋友让他和一个和尚挤了一晚。1910年，跟他以前在贡伯戈纳姆补习过的学生萨斯特里同住了一段时间。他的学生现在就读王公学院，住在学院旁边的维多利亚(Victoria)学生宿舍。那是一座很大的红黑色砖砌成的建筑物，有三个角塔和三层楼高的拱顶，好似原封不动地从英国运来的。拉马努金和他同住，每天早上去找需要他补习的学生。

他是一位古怪补习老师，名声显然众所周知，因为他找不到几个学生。萨斯特里回忆说他每晚：

总抱怨自己命运的坎坷，我就给他加油，说像他那样天赋极高的人不要悲观，总会有出头的一天。他却说像伽利略(Galileo)这样的伟人死前还受宗教法庭的裁判，而他一定要潦倒终生。我继续鼓励他，说神是伟大的，一定会帮助他，所以不要气馁。

那是一个感情非常脆弱的时期，一点点小事，例如喝到宿舍里供应的一碗又稀又薄的 *rasam*(一种辣汤)，他都会记得好几年。

1910年的后半年到第二年，拉马努金住在文卡塔纳拉扬巷(Venkatanarayan Lane)，这是在市公园区，离红色的中央车站很近。这一次他和两位贡伯戈纳姆的老朋友住在一起，就是纳拉辛哈·耶恩伽尔(K. Narasimha Iyengar)和萨兰伽帕尼·耶恩伽尔(十年前，算术比他多考两分的事，显然已经忘怀)两兄弟的家里。在贡伯戈纳姆的时候这两兄弟就时常替他买点衣服等等，现在又在帮他的忙。

纳拉辛哈在马德拉斯基督学院读书。这是苏格兰传教士办的学校，拉马努金替他补习数学。当文科一等学位考试要来时，纳拉辛哈因为数学不行，气急败坏，几乎不想参加考试。

就在考试的那天,拉马努金从市公园区步行4英里(约6千米)路到举行考试的王公学院找到了他的朋友,说服他参加,而且临时抱佛脚,给他鼓励和考试指导。他所说的恰好都派上用场,纳拉辛哈正好及格。

这件事后大约一天,拉马努金坐了马车来到帕协阿帕时期的的老朋友拉达克里希纳·耶尔的家门口。拉马努金又病了,可能是动手术的关系。拉达克里希纳将他留下,给他吃点东西并且请来一位医师。医师说拉马努金必须有人时时照料,拉达克里希纳就把他送到港口附近的海滩车站,坐上火车回贡伯戈纳姆自己的家。拉达克里希纳终生难忘,在他正要离开之时,拉马努金转过身来对他说:“如果我死了,请你把这个交给(帕协阿帕学院的)辛加拉维鲁·马达利尔,或者马德拉斯基督学院(Madras Christian College)的英国教授爱德华·B·罗斯(Edward B. Ross)。”这位教授是他刚刚结识的。

说完之后,拉马努金交给他两大本数学笔记。

拉马努金的数学笔记不再只是他个人的数学思想的记录了,由上面这个小故事可知,这将是他留传后世的遗产。它是拉马努金用以引荐自己的文件,找工作的保票——“这是一项见证,”正如他后来的英国朋友内维尔所说的,“证明他并不是无可救药的失败者”。万般无奈,他开始拜访他以为可以帮他找一份工作的有影响的人物。在他拜访的时候,随身带着他的数学笔记——就像照相师带着照相册,推销员带着样品一样。所以结了婚一年半之后,他变成了沿门挨户的推销员,要出售的正是他自己。

很多地方,要找工作必须给许多不认识的官员写信,填申请书,希望得到接见,恩赐一份工作。印度却不是这样,这里需要与上层人士有关系,带上家庭朋友的介绍信,或朋友家庭

的介绍信去登门拜访。在南印度，圈内与圈外之间的界限表明了南印度社会关系的影响力非同小可。不像西方国家，公私之间分得很清楚，时常能够和大人物见面，似乎从不会有人借口太忙而不肯多见一个找工作的人。

拉马努金的说词总是一成不变——双亲叫他结婚，现在需要一份工作，虽然没有学位却自修数学，所以请大人过目……他的笔记本……

他的数学笔记是他惟一的介绍信。在这个国家里，介绍信比在西方国家更重要。因为信里一开头就说明他的学位，不然交谈时务必要提到这一点。印度作家乔杜里(Nirad C. Chaudhuri)在描述他的国人如何自我表扬时写道：“正像军队一样，行军时，总要击鼓行进，鼓号是必不可少的；在我们一生的行进之中也是这样，在我们的社会里，什么样的称号包装什么样的人。”拉马努金仅有的称号是退学的失业者。一位名教授对他当面说过，没有学士学位是绝不会有成就的。

拉马努金的自我推销工作，在当时是十分困难的。可是在他走遍南印度自我推销时，他的好习性却总是受到欢迎。大家都喜欢他。

一位后来在马德拉斯认识他的人说：“他总是很友善很合群，……总是很有趣，爱讲泰米尔语和英语的同音双关语，爱说笑话，有时讲很长的故事，讲起来就自己先笑个不停，头巾都会散开，他就一面讲一面系头巾。”有时还没有讲到要紧关头，自己就笑得停不下来，只好从头再讲。“他是那么带劲，伤感的眼睛却闪闪发光……他什么都能谈，不喜欢他是很难的。”

拉马努金并不是跟谁都很随便的。大多数时候他很腼腆，只在和几个亲密的朋友相处时才显得快活。他对人与人

之间的微妙关系也常常视而不见。他在贡伯戈纳姆的一位同班同学哈里·拉奥讲过一段常被人忆起的趣事：他到马德拉斯来看拉马努金，“他马上打开他的笔记本向我讲解那些古怪的数学定理和公式，全然没有顾及我对数学一窍不通。”他根本就想不到这一点，拉马努金一旦沉醉在数学里，他旁边的人就好像不存在似的。

不可思议的是，他迷人的地方，正是他这种对于人际关系的全然无知。他的这个短处，从另一个角度来看则是他的天真、诚恳，所有认识他的人都看到了这一点。

“拉马努金的心灵如此单纯，想对他不友好都不行”，他的高中同学拉古纳坦(N. Raghunathan)回忆道。这位同学后来也是个数学教授。拉马努金的幽默是浅显的，他的双关语很粗率。他的娱乐就只有看木偶戏，再不然就是看村里办花会时在大街上演的戏(terukkutu)，这种戏一演就是通宵。拉马努金总是跟朋友一起去，一路上有说有笑。他的兴致一直很高，一举一动是那么直截了当，不顾及利害关系，人人都一目了然。没有人不信任他，让你从心里就喜欢他，希望能帮他忙。

早几年在贡伯戈纳姆的时候，有一位老太太时常照料拉马努金，给他吃下午点心。“她是一点数学都不懂，”替拉马努金写传的一个印度作家写道，“拉马努金的眼神以及他投入某件事时的专注——就是她喜欢他的原因。”其他的人也是如此被他吸引。

人们喜欢拉马努金，不是因为他对别人的关爱。人们也可能不懂他的数学，恐怕有人根本就以为他是个傻瓜，有些人可能也帮不了什么忙，但是人人都喜欢他。

1910年的下半年，拉马努金坐上北行的火车离开贡伯戈纳姆。在距马德拉斯一半路的维卢布勒姆(Villupuram)下了

车。此地位于海滨城市本地治里(Pondicherry)之西(该市当时还是法国管辖地)。拉马努金在维卢布勒姆又换车到蒂鲁戈伊卢尔(Tirukoilur)。这个镇只有约9000人,是区公所的所在地。拉马斯瓦米·耶尔(V. Ramaswami Iyer, Iyer也可以拼写成Aiyer,是婆罗门中崇拜湿婆神那一派的种姓称号,在南印度很常见)在那里当副税务官,算一个中层职务。

拉马努金之所以远道来访拉马斯瓦米,是因为后者还是一位数学家,尤其是他最近组织了印度数学会(Indian Mathematical Society)。人人都叫他“教授”,其实他并没有这个职位。当他在王公学院读书时,他为英国的《教育时报》(Educational Times)写过一些数学文章,该刊物的编辑以为他在学院里执教,就称他教授,于是这个称号就保留下来了。

和以往一样,拉马努金带了他的笔记本。教授看了看。他本人是几何学家,对笔记里的数学他都不熟悉。至少,据他以后的回忆,他记得:“笔记本里所记载的一些非同寻常的数学结果使我很吃惊。”这是不是说他会给拉马努金在税务所找个小事做做?完全不是这回事。“我哪里会把这位天才绑在税务员的桌子上窒息他的才气?”他以后如此写道。他就送拉马努金上了路,带上笔记本和几封介绍信到马德拉斯找数学界的其他朋友。

朋友中有一位就是塞舒·耶尔,他是数学会的基本成员,皱缩的脸,戴一副眼镜。他是拉马努金在政府学院的教授,1906年之后彼此就没有再见面。事隔4年,塞舒·耶尔到了马德拉斯的王公学院。拉马努金就在此处和他见面,带了数学笔记和拉马斯瓦米的介绍信。从而又得到其他的引荐和介绍信。

他先去拜访一位巴拉克里希纳·耶尔(S. Balakrishna Iyer),此人刚进入数学界,不久前才开始在马德拉斯郊外赛达

培(Saidapet)的教师学院做数学讲师。拉马努金问他可不可以介绍自己和他的英国上司多威尔(Dodwell)先生认识,或替他找一个书记的工作。薪水低一点都没有关系,做什么都行。巴拉克里希纳请他喝了一杯咖啡,看了看他的笔记本,一点也不懂。然后就为了拉马努金去见多威尔先生,先后去找了三四次都没有结果。事后巴拉克里希纳歉疚地说:“我的身份不够。”——不足以有任何影响。

12月,拉马努金去见拉马钱德拉·拉奥(R. Ramachandra Rao)。他是“够身份”的人。从马德拉斯的王公学院毕业,1890年,年方19岁就在省政府做公务员,而且曾经晋升为信用合作会(Cooperative Credit Societies)的主任。现在他在内洛尔(Nellore)市做区税务官。此地沿东海岸铁路离马德拉斯约100英里(约160千米),人口约35 000。不久前,他得到一个头衔“迪万·伯哈德”(Dewan Bahadur),有点近似英国的爵士。此外,他也是数学家,而且是4年前拉马斯瓦米所始建的数学会的秘书。有时也给会刊的问题栏提供解答。他相当聪明、富有,关系又很好,是那种家长作风的人。后面总跟着一群家仆和随从,利用关系什么事都可以办得到。

拉马努金是怎样和拉马钱德拉见面的,至今仍不清楚。有些记录说是拉马钱德拉的侄儿克里希纳·拉奥(R. Krishna Rao)拉的线。拉马努金的朋友拉达克里希纳,就是那位曾被委托保管数学笔记的好朋友,说是他写信给他在内洛尔做工程师的岳父来安排他们之间的会面。塞舒则说是他做的安排。拉马努金的英国朋友内维尔推测说,塞舒是写过一封介绍信——但是拉马努金“太胆小”没敢用这封信。要有人再推他一把,才敢去见这位大人物。推他这一把的人是拉贾戈帕拉查里(C. V. Rajagopalachari)。

拉贾戈帕拉查里只比拉马努金大几个月,和他在同一个

城里长大，常去同一座寺庙，同读市立高中。早在 1902 年的一天下午，有一个高班里据说最聪明的学生给了他一个题目，拉马努金不是很棒吗？能不能解出下面这个题？

$$\sqrt{x+y} = 7$$

$$\sqrt{y+x} = 11$$

初看之下，以为是所谓的“有两个未知数的联立方程”。实际上这是一个很难解的四次方程，要用一个专门解这种类型方程的定理。对任何一个 14 岁的聪明少年，这个题目都是很难的。“可是大出我意料之外，”拉贾戈帕拉查里事后回忆道，“拉马努金一共只算了半分钟，两步就得到解答。”

事实上，拉马努金可能根本“算都没有算”，只不过看看题，猜到两个未知数要都是平方数才行，用一点心算就看到了答案  $x = 9, y = 4$ 。换句话说，只不过脑筋转得快，数学技巧并不很深。可是因此给拉贾戈帕拉查里留下很深的印象，从此和拉马努金成为好朋友。

几年来，拉贾戈帕拉查里的事业直线上升，他已成为律师，而拉马努金却一事无成，两人也失去联络。现在，几乎 10 年之后，在 1910 年居然又在马德拉斯巧遇。消沉的拉马努金告诉拉贾戈帕拉查里他在学校里的失败。他说自己是没有前途的，因为没有人能赏识他。他给孟买的名教授萨尔达纳 (Saldhana)写了一封信，他给印度数学会也写了信，还把他的研究报告寄去，可是都石沉大海。幸亏一位朋友送了他一张回贡伯戈纳姆的火车票，所以当晚就要回去。

拉贾戈帕拉查里劝他不要走。拉马努金可能说过自己身上有一封去见拉马钱德拉的介绍信，不过还没有用。拉贾戈帕拉查里就说要亲自带他去见拉马钱德拉。拉马努金说自己没钱再留在马德拉斯了，他的朋友说一切费用都算在他身上。

拉马努金终于见到了拉马钱德拉。这位大人物后来有以

下的记述：

几年前，我那一点数学都不懂的侄子对我说，“叔叔，我带了一位懂数学的朋友来看你，他说的我一点都不懂。您要不要听听他讲的东西里真有点什么？”以我在数学界的至高地位来说，我是降格让他前来。这是一个矮小粗鲁的人，很壮，很结实，没有修面，也不太干净，只有一个特点——眼睛发亮——他走了进来，手里拿着已经开始破损的笔记本。

按拉贾戈帕拉查里的说法，拉马努金一共和这位名人见了三次。第一次，拉马钱德拉要拉马努金把笔记本留下几天。第二次，看过他的笔记之后，就说拉马努金的定理他从来没有碰到过，也一点都不懂，所以叫他们不要再来烦他。当然他又来烦了他一次，就是第三次，这一次，拉马钱德拉就把话讲得很坦白。他承认，拉马努金很真诚，不是欺诈，恐怕也有点学问。其实他是说拉马努金恐怕是自己也不知所云。

就在这两个好朋友离开的时候，拉马努金想起他带了孟买的数学家萨尔达纳教授的一封回信。萨尔达纳也说是无能为力。不过，他在拉马努金寄给他的信纸边上写道，拉马努金的一些公式很有意思，只不过这个人是在他不熟悉的领域里工作，所以他不能把自己的声望赌在这个人身上。

这种评语当然说不上是有力的支持，其实和他这段时期所常听到的话没有什么差别——大家对他所做的都不太了解，所以不敢确定他是突发奇思妙想，还是天才的涌现。拉马钱德拉也就是这个意思，他情愿犯过于小心的错，而不出头为拉马努金争取什么。萨尔达纳也是太过谨慎，不过他倒明说拉马努金绝不是胡思乱想。

对执著不放的拉贾戈帕拉查里来说，他从萨尔达纳的这句评语找了一个办法足够打消拉马钱德拉的任何疑虑。两人

又再回去——拉马努金的命运也就在此一举——这是第四次。一开始，拉马钱德拉有点生气。怎么又来了？才过了几分钟？可是当他看到萨尔达纳的评论，又看了几个容易的例子之后，他态度变了。“这些都超过了所有现有的书籍，”他以后写道，“他是一位有才气的人，我已毫不怀疑。他一步步领着我进入椭圆积分和超几何级数。他的发散级数理论，那时他还沒有向外界发表，终于使我五体投地。就问他要我如何帮他。”

他只要求有能维持他生活和工作的最低收入。正如拉马钱德拉以后所写的：“他要求闲暇，换言之，就是够吃，有足够的时间让他做白日梦。”

### 3. 在马德拉斯的“闲暇”

他要求闲暇……

拉马钱德拉在这里所用的闲暇(leisure)这个词，从拉马钱德拉那个时代以来，其含义已经有了很大的改变。今天，我们说闲暇活动或追求闲暇是指寻求娱乐或游戏。但这个词是来自中古时期的英文 *leisour*，是自由和机遇的意思。《牛津英语词典》(Oxford English Dictionary)里这个词的释义不是说从何处得到的自由而是说自由地去从事该做或爱做的事，尤其加重语气在“爱做”上面。所以贝尔在写到 17 世纪法国著名数学家费马(Pierre de Fermat)时就说，因为他为皇家做事，所以能有“充分的闲暇”——即有闲暇去搞数学。

拉马努金也是一样，他并不是要自我放纵地一味寻欢作乐，而是要自由自在地发挥他的天赋。萨克雷在他的《卡纳拉，马拉巴尔和策德三区的政情报告书》中所说的“给他们闲暇，独立和理想”使英国达到更高的文化水平。这些“悠闲的

“欧洲绅士”用不着为生活辛劳，所以能把他们的时间和精力用在道德或智慧的领域里。拉马努金虽然不是出身绅士之家，但是可以算得上是精神贵族。他也追求“闲暇”，这和世界上成千上万的精英一样，所追求的也是他想要做的事。

了不起的是——由于他执著的追求，也由于他那非凡的大脑——他终于得到了他所追求的东西。

他生为婆罗门也有所帮助。拉马努金家里很穷，有时几乎吃不饱。但是在印度，经济地位不能和种姓的高下相比。身为婆罗门，就可以打进好些别的种姓进不去的圈子。事实上，这几年来拉马努金所接触的人，几乎全是婆罗门。例如拉马斯瓦米·耶尔、塞舒·耶尔、拉马钱德拉都是婆罗门。如果拉马努金属于另一个种姓，当然也可能得到那个种姓中有地位有财富的人士的帮助，不过没有其他的种姓比婆罗门更注重身份、关系和生活品位。

因为是婆罗门，所以觉得有更大的自由空间去追求这种有创造性的闲暇——甚至觉得这正是他应该做的分内事。贵族阶级一向是被人供奉，自己讨生活则是别人做的事，不被他们所看重。说得难听一点，拉马努金有一种上等人的派头——自以为了不起，不爱做什么就不做什么，跟数学无关的事就不做，说得婉转一点（其实也比较合乎实情）——他仍然是个没有看破红尘的出家人。

拉马钱德拉又把拉马努金的事交给塞舒·耶尔，并说把他留在内洛尔永无出头之日未免太残酷。他决不肯叫他在当地税务所做点小事。虽然几次考试不及格，他认为还是应该替他找一份奖学金，而且说不定有机会。目前，让他留在马德拉斯，一切费用归他负责。

此后，拉马努金每月得到 25 个卢比。当然不算多，可是

减轻了他经济上的重担。生活也开始有了起色，如今他真的是离开了童年时代的贡伯戈纳姆。从 1911 年起的这三年，他就生活在南印度的首府马德拉斯的广大天地里。

在大英帝国，马德拉斯是第五大城市；在次大陆，它是第三大城市，位居加尔各答和孟买之后。有人说城市的名字取自一个传奇故事中一个渔夫的名字马达拉森 (Madarasen)；也有人说它是 Mandarajya 这个字的变音，意思是傻人国；还有人说是由葡萄牙语 Madre de Dios，即上帝之母而来。这座城市本身则是英国殖民政策的结果。英国的东印度公司在古沃姆 (Cooum) 河口买了这块地，1642 年建造了圣乔治堡 (Fort St. George)。此后它就是英国统管南印度的枢纽。

马德拉斯不是一个密集的城市。1910 年，那里住有 55 万人，沿着孟加拉湾上上下下好几英里，分成好几个区：乔治城区，特里普利卡内区 (Triplicane)，迈拉坡尔区 (Mylapore)，切保克 (Chennai) 区等等。有好几个区可以追溯到几百年甚至几千年前。老城中心以南三英里半 (约 5.6 千米) 路是迈拉坡尔区，就是卡帕拉斯瓦拉庙 (Kaparaswara Temple) 的所在地。听说印度的守护神使徒圣托马斯 (St. Thomas) 在公元 1 世纪就住在这里。在这以前，希腊人和罗马人都已经知道这个地方是个港口。

现代的马德拉斯市很平坦，只有高耸的千年古庙的塔门瞿布罗突兀其上。整个城里没有一处超过海拔 50 英尺 (约 15 米)。四处都看得见成千上万的小“茅屋”，尤其是老村子。“茅屋”是用泥和茅草盖的，只有一个房间。即使有红瓦顶，比较坚实的建筑也很少超过两层高。这么多年来，这座城市只是横向发展，不向高处发展。要扩大，总是在前后多加房间，从来不加盖一层。和美国的城市相比，马德拉斯不像熙熙攘

攘的纽约，而更像凤凰城或圣迭戈。

城里仍然有大片的耕地，有棕榈树和稻田，有水牛以及在河里或池里洗衣服的妇女。海滩边有渔家和渔船。除了一两个区之外，现在西方人所描述的那种在印度人挤人的情况，当时尚未发生，城市中仍保留着乡村的悠闲。

站在港口边灯塔顶上俯瞰码头，景象就如一位英国游客在 20 世纪初所描写的：

绿色的马德拉斯比北印度最绿的城市还要绿。在你的脚下，黑城（相邻的一个区）里的红屋顶只是一个小点。一边是澎湃的绿海，一条白色的浪花线和好几英里长的宽广无人的黄色沙滩，另一边是源于欧洲的马德拉斯森林，浓密的绿色向西南方延伸至看不到的腹地，融入田野的一片翠绿。

当然这是欧洲人眼中的马德拉斯。在印度人看来，和加尔各答或孟买相比，马德拉斯的步调慢得多，人容易相处，色调绿一些，城区也更开旷些。在印度，穷人的日子处处都不好过，但马德拉斯则稍微好些。这里没有要御寒的冬天。离北部这么远，又是一个地区的首府，特别由于它是南印度，所以各地来的人都觉得舒适亲切。他们都从南方各地的城市、农村搬到这里来住，和拉马努金一样。

1911 年 5 月，拉马努金离开了文卡塔纳拉扬巷跟人合住的地方，搬到斯瓦米·皮莱街（Swami Pillai Street）的一间名字为“夏宫”（Summer House）的公寓。住了差不多两年。每天和十几位同住的学生到一家婆罗门开的饭馆吃饭。这条街叫派克罗夫特路（Pycroft's Road），是特里普利卡内区的一条大街。

沿派克罗夫特路走几分钟，王公学院的右边就是海滩。那时，此地已经是马德拉斯的风景名胜。到过马德拉斯的人

哪怕只住几天，都会记得这个地方。这不只是一个海滩而已，可以说是自然界一大杰作。千万年来，海水将沙冲积上岸。经过一位本不太出名的提督大人格兰-达夫(Mountstuart George Grant-Duff)在1880年间刻意营建，不断改进，不断整理。防波堤边涛声如雷，沙滩很深，一脚踏下去，您会感到要穿过一大片沙漠才能走到水边。

拉马努金常常到这里来，一面在海边散步，一边想他的数学。有时乘傍晚凉爽的时刻和朋友们一起来，坐在沙滩上，一面玩弄沙里的贝壳，一面讲些希奇古怪的故事，直到深夜。

这里很开阔，远离特里普利卡内那多尘炎热的街道，又相当凉爽，令人心旷神怡。朝城里看去，王公学院的钟楼，在落日下一片金黄；朝海外看去，几条商船——远的只见它灰色的轮廓，近的看得见吊杆和鲜明的色彩——它们来自锡兰的科伦坡，沿海岸绕过印度南端来到马德拉斯。

拉马钱德拉的慷慨解囊，减轻了拉马努金肩上的经济重担，让他得到快乐，至少不那么烦恼。结婚两年以来，他终于又能和朋友在一起，欢乐无忧，做他爱做的事。他在帕协阿帕时就已相知的克里希纳斯瓦米，如今又和他在夏宫同住一室。还记得有一天，拉马努金和他们讲天文，一直讲到深夜。最后，克里希纳斯瓦米的表弟，因为拉马努金讲个不停，让他不能入睡，气得把一盆水倒在他头上。这总可以把那发烧的脑子冷下来吧，可是拉马努金毫不怪罪——这不就是冲了个清凉的恒河澡(Gangasnanam)吗——能不能再来一盆？

1911年过得很好，也很有希望。那年，印度的首都从加尔各答迁到德里，有一大阵的热闹和仪式。那年，马德拉斯加修了下水道，有疏导管、过滤站、水泵等全套设备。那年，点油的路灯改成电灯；那年，拉马努金的第一篇论文刊登在《印度

数学会杂志》(Journal of the Indian Mathematical Society)上——这是他登上印度数学舞台、及世界数学舞台的第一步。

#### 4. 雅各布·伯努利和伯努利数

5 年前,即 1906 年下半年,马德拉斯、迈索尔、哥印拜陀(Coimbatore)以及南印度其他地方的学院里,几十位教授都收到一封来自拉马斯瓦米·耶尔的信,信中提议组织一个数学会。这个建议有实际的需要。和拉马努金当年很少能看到数学书刊一样,很多印度数学家都苦于缺乏欧洲或美国的书刊。在拉马斯瓦米的信里,他说学会可以订阅这些期刊或购买新书给会员们传阅。只要几个会员每年拿出 25 卢比的会费,这个学会就可以办成。

他招募了 20 个基本会员,每位都急于和其他搞数学的人交往。一开始,学会叫分析俱乐部,后来才改成印度数学会,不久就开始出期刊。12 年后在孟买开第二次会员大会时,就已经有 197 个会员,而且传阅 35 种欧洲和美国的期刊。

这些事件等到现代才发生,其实在英国人到印度来之前 1000 年,印度人就已经在搞数学了。7 世纪时,西方国家仍在罗马数字的束缚之下,印度就已经开始使用目前的数日字。代表空无的零,更是一个极大的成功,它的出现可以追溯到公元前 2 世纪。至少到公元 3 世纪它就在一本古书里出现过。9 世纪,中印度瓜廖尔(Gwalior)附近一座大庙的墙上也看到它(用它说明某花园的长度有 270 个单位)。

印度在数学上的许多贡献是基于天文的需要。例如,要推算吠陀庆典的精确时日。代数、几何和三角也都因此受益。著名的人物有阿耶波多(Aryabhata),出生于公元 476 年,他是最早算出精确的  $\pi$  值的人物之一。150 年后,又有一位婆罗

门笈多(Brahmagupta),至今还有一些定理用他的名字命名。

这是个内涵丰富的传统,但和西方数学的摇篮希腊的传统不同。希腊数学家,特别是欧几里得(Euclid),最讲究严整的证明。中学生在初等几何中就要学这种一步接一步的证明。印度数学家比较看重结果,而不管是如何得到这种结果的。所以不像严整的证明那样,可以同时把无关紧要的渣滓滤掉,印度的数学也因此良莠不齐,甚至有些根本是错的。有一位穆斯林作家在一本讨论印度数学的书里就说过“(印度数学是)珍珠和鱼目同列,水晶与顽石并陈”。

到了20世纪,珍珠水晶都埋藏在时间的尘埃里。几百年来,印度似乎守着它的数学园地和全世界对抗。如今这都成了历史,以后对世界数学宝库似乎也没有太大的贡献。次大陆南部只有喀拉拉邦还出了几位数学家,不然除了12世纪的大数学家婆什伽罗(Bhaskara)之外,这中间真的断了香火。数学会的成立并不意味着再生,但是创办人——一方面要和西方发生关系,一方面又为自己的历史骄傲,也明白好汉不言当年勇——的确希望印度数学得以重生。

拉马努金就在1911年,在这新生的数学天地里“出头”成为数学家。前一年,他在蒂鲁戈伊卢尔和协会创办人拉马斯瓦米·耶尔见过面,那时是为了找份工作。现在他的文章在学会第三期杂志上发表了。和其他的刊物一样,每期一开始总是登读者提出的问题,既有娱乐性又有挑战性。

拉马努金提的两个问题之一,即数学笔记第289题是求下式之值:

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \dots}}}$$

看上去好像是个简单的算术题,连x和y都没有。可是一连等了三期——6个月时间,都没有人给出答案,所以拉马努金

只好自己提供答案。问题的关键是那个省略号,说明这些套在一起的根号要无限地延伸下去。

早几年前,拉马努金已经有了这个问题,那时他是在说明一个较为广泛的定理。在他的第一册数学笔记 105 页,第 12 章的第 4 个等式如下:

$$\begin{aligned} & x + n + a \\ &= \sqrt{ax + (n+a)^2 + x \sqrt{a(x+a) + (n+a)^2 + (x+n) \sqrt{\cdots}}} \end{aligned}$$

这个等式是说,任何数分成  $x$ 、 $n$  和  $a$  三部分之后,该数就可以用上面这个无穷个相套的平方根所写成的式子来表示。例如把 3 写成  $(x + n + a)$ ,其中,  $x = 2$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0$ 。将这三个数代入上式,就是拉马努金要找的答案。这是他笔记本中的第 289 题。换言之,前式之值是 3。如果不用拉马努金所提的通式,找答案的方法便不太容易。

拉马努金这个看上去不起眼的难题,是从他在数学园地里一向最喜欢的角落里产生的。一个外表看上去很相似的问题是,可能要读者在上式中只取 10 个根号、100 个根号或 1000 个根号来计算其值。那么,你可以将数值代进公式,做到规定的根号时就停下。但是,这不是拉马努金所问的问题。他问的是,如果你不停地做下去,做到无穷个根号才停,会有什么结果?

上面的话里似乎自相矛盾。一个数怎么会“等于”无穷大? 无穷大是一个到不了的地方,也不是可以代入方程的量,它也没有“最后一个数”。一个数学式“算到”无穷大会有什么结果,是要探测一片无法捉摸而且神秘的园地,这是肉眼看不到的境地。

没有人比拉马努金更热忱地探测过这片境地,没有人比他知道得更多。

许多的数学运算可以做到无限次。拉马努金在杂志上发表的这个问题牵涉到“根号的相套”——即平方根的平方根的平方根……这个问题很少有人研究，直到现在也是如此。拉马努金也研究过连分式——即分数的分数的分数……他花时间最多的是无穷级数。他的数学笔记几乎每页都是无穷级数。1911年在杂志上发表的文章中无穷级数也占了相当多的篇幅。一位数学家写道：“无穷级数是拉马努金的初恋。”

这几个泄露天机的小点点，在他的笔记中很早出现。虽然有很多时候他也用“& c”代替，意思也是一样，就是仿前面的形式再写下去。因此，

$$1 + 2 + 3 + \cdots$$

很显然，再下面是4，再下去是5等等。

上面的例子没有什么意思，无穷多项相加又得到无穷。有些无穷级数相加却不是无穷，而是一个有限数，这才是引人注意之处，才有价值，也就有人研究它。数学家称它们为“收敛”的级数。例如

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

下一项是 $1/16$ ，接着是 $1/32$ 等等。奇怪的是，再一项项地加下去，因为每一项都小得很快，所以即使加无限次，总和也不会超过2。希腊人就已经知道这件怪事。2就是这个级数收敛的值，再加下去只不过更接近2而已。

不过每项渐渐减少的级数不一定都收敛，例如：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

外表上看起来和刚才那个级数很相似，但是它不收敛。你以为不论加上多少项之后，它会向某值收敛吗？再加下去就会超过这个值。2是它的收敛值吗？不对，只要加4项就超过2

了。会是 3 吗？要多加几项，但也不过 11 项而已。会是 10 吗？加 12390 项之和就超过了 10。无论选什么数，这个级数之和总会超过它——这是可以证明的——所以这个级数之和是无穷大，它不收敛。

数学家有兴趣的级数是收敛级数，或是在某种条件下收敛的级数。尤其是它的收敛值使这些级数变得很有意思。

拿三角函数为例，想来大家还记得，在中学初学三角时，老师总是从直角三角形的边长之比讲起。这些函数——正弦、余弦、正切等等——全是直角三角形中某边和另一边的长度之比。在三角学书的后面总有所谓的三角函数表，那就是大小不同的角的各个三角函数之值。任取一个角，用这个表就可以查出这个角的正弦之值。如果这个角是 30 度，它的正弦就是 0.5000。其他的角也是一样。这个函数表，航海要用到它，设计机器也要用到它。

这种三角函数，原本是从直角三角形的边长之比开始，也可以用似乎不相关的方式来计算——例如无穷级数之和。若不用度数来表示  $\theta$  角的大小，而用数学家们认为比较方便的单位——弧度，则

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

(此处的 5! 读作 5 的阶乘，就是  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 。)

要算 30 度的正弦？先把 30 度相应的弧度算出来（等于  $\pi/6$ ，约为 0.5236），代入上式，然后随你高兴要算几项就算几项，直到你满意的精确度为止。其实，算到三项得到 0.500 002 就够准确了，和真值 0.500 000 非常接近，因为这个级数收敛得很快。

这是个交错级数——各项轮流地加、减，并且无穷次地做下去，得到的值和边长之比相同。这几乎是无法理解的。

在无穷级数中这种意想不到的相互关系出现很多，这也是它们吸引数学家的原因。尤其是拉马努金，他的第一篇论文的主题伯努利数，就是用无穷级数来定义的数。他的文章里几乎每一页都在讨论这些数。

在 17 ~ 18 世纪，有一个著名的数学世家，即伯努利家族。这个家族原来出身商业界，为躲避安特卫普所发生的反新教徒大屠杀而定居瑞士。该家族第一位著名数学家就是雅各布·伯努利 (Jakob Bernoulli)，他对微积分——这一用以处理连续变量的有力工具——有很大的贡献。将德国数学家莱布尼兹 (Gottfried von Leibniz) 和英国的牛顿爵士在他之前 20 多年的成就推向前进，并导出了如今用他的名字来命名的数。

伯努利数和  $e$  这个数的关系很密切。 $e$  和  $\pi$  一样，有许多特别的性质，所以在数学中处处出现。 $e$  的定义是

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

当某个与  $e$  有关的特定的代数式，以某种无穷级数表示时，它的每一项系数就都有特殊意义。（系数是代数式中每项所乘的普通数，例如在  $3x + \frac{1}{2}x^2 = 12$  中 3 和  $1/2$  就是系数。）它们就是伯努利数。这个名词最早出现在 1713 年他去世后所出版的《猜度术》(Ars Conjectandi)一书中。各人用不同的符号曾带来一点混淆，而按某种规定来写的伯努利数  $B_n$  的前几项是  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ ,  $B_6 = 1/42$ 。（除了第一项外，每一个奇数项都是零。）

拉马努金 8 年前第一次误打误撞地碰到伯努利数时，恐怕连这个名字也没有听说过。卡尔的《汇编》第二卷提到这个数的各种变形，可是拉马努金直到 1904 年读政府学院时才看到它——那时他研究伯努利数已经是第二年了。后来他就一直研究它，反复地使用它。例如利用它通过欧拉—马克劳林

(Euler-Maclaurin)求和公式来算一种称为“定积分”的数学对象的近似值。他的第一本笔记中的第 30 页、31 页和第二本的第 5 章就讨论过这些问题。

如今,拉马努金用这个题材作为他第一篇正式数学论文的主题。孩子们用来防御小儿麻痹症的疫苗以索克(Salk)或塞宾(Sabin)命名,超音速飞机的航速是大于 1 马赫,在用奥地利的物理学家马赫(Ernst Mach)的名字命名的测量系统中音速的单位就是马赫。在科学和医学上,用自己的名字命名什么——一种治疗的方法,一个测量单位,或是一个定理就可以万古留名。在数学界也一样。伯努利数在许多数学问题上都用得到,他的名字也因此流传至今。它们并不是一串毫无意义的数目字,它们之间有重要的关系存在。拉马努金就发现了许多这一类关系——其中有些是别人已经发现了的,他是再度发现。

“论伯努利数的某些性质”这是他文章的标题,也是一个很恰当的标题。金属的熔点或比重,这些是金属的物理性质,登载在许多化学手册中。拉马努金所发现的,则是这些数的数学性质。伯努利数可以用分数来表示,例如  $B_{32} = \frac{7709321041217}{510}$ 。拉马努金发现这些分数的分母可以被 6 整除。

他也找到如何用前面的伯努利数来表示后面的伯努利数的另一种方法。他的文章共分为 18 节,其中的第 6 节如下:

6. 可以证明,若  $n$  是偶数且不等于零,则

(i)  $B_n$  是一个分数,将  $B_n/n$  约分为既约分数后,分子必是素数。

(ii)  $B_n$  的分母有 2 和 3 两个因数,但每个只出现一次。

(iii)  $2^n(2^n - 1)B_n/n$  是整数,因而  $2(2^n - 1)B_n$  是奇数。

拉马努金的文章就这样写下去,占用杂志篇幅 17 页之

多。据统计,一共有 8 个定理,其中的 3 个有一点证明;2 个是系,还有 3 个只是猜测。

拉马努金的手稿抵达编辑手中时,还有点问题。后来人们指出“拉马努金所用的方法是如此地简捷,如此地新颖,但是他的表述方式则既不清楚又不精确”。接着又说:“一般[数学]水平的读者若不熟悉这种智力体操,是无法跟得上他的。”其实也就是说文笔很糟。这是相当景仰拉马努金的纳拉亚纳·耶恩伽尔(M.T.Narayana Iyengar)讲的。他是班加罗尔中央学院的数学教授。杂志的编辑后来承认“为拉马努金的文章做编辑真不容易”,他的文章手稿总要来回三四次才行。

他的第一篇大作,和以后的其他著作一样,在仿佛毫无关联的事物之间找到联系。他的发现,后来的数学家大半都证明无误。可是拉马努金自己或者不想为证明操心,要么就根本无意去证明,即使提供了证明也极其简略而且不完全。

这是不是卡尔先生给他的影响?后来有许多学者都有这个看法。卡尔写的《汇编》就只是结果,而不是创作,所以即使偶尔提出证明,也都十分简略。但拉马努金是在创作,却采用了同样的手法。例如,他曾声称,第  $n$  个伯努利数被  $n$  除之后一定是素数。证明呢?毫无踪影。后来一位数学家说:“他认为有了数值作证据就足够了,不但没有证明,甚至根本不提还有无证明的必要。”拉马努金是否认为证明无关紧要固然值得讨论,可他一向即使提供出人意料的结果,也不给出任何证明,这个事实是无可争辩的。

就上面所举的例子来说,拉马努金根本是错的。例如  $B_{20}/20 = 174\,611$  根本不是素数,它等于  $283 \times 617$ 。

但这个失误只是例外而非一般情况。拉马努金对自己的信任常被证明无误。他的这篇文章,他的数学笔记,他的有关数学的书信来往,以及他发表的文章,都能作证——简直就是

奇迹——他多半是对的。

## 5. 港务信托处

《印度数学会杂志》登出他的文章之后，拉马努金终于登上世界数学舞台，虽然只在一个偏僻的角落里。他开始被人注意了。

第二年年初，一位马德拉斯基督学院的学生，K·S·斯里尼瓦散(K.S.Srinivasan)，也是早年在贡伯戈纳姆就认得拉马努金的朋友，到夏宫来看他。

“拉马努金，”他说，“大家都叫你天才。”

哪里说得上天才，拉马努金回答道：“你看我的手臂，它可以说说明一切。”他的肘部又粗糙、又脏，又黑。在他用石板写东西时，他发现一只手写，另一只手臂用来擦比找布来擦快得多。尤其是忙的时候。“是我的手臂将我变成天才”，他说。

斯里尼瓦散问他为什么不用纸？拉马努金说买不起。他的钱都是拉马钱德拉·拉奥给的，很有限。买纸？一个月要好几百张。

另一位曾住在夏宫的朋友 N·拉马斯瓦米·耶尔(N.Ramaswami Iyer，和绰号叫教授的那一位并无亲戚关系)，也记得拉马努金用纸的“胃口”很大。他老记得拉马努金躺在草垫上，一身破衣衫，“满头头发胡乱用绳子打个结”，不停地工作。身边到处堆的都是纸或笔记本。还有一个帕协阿帕的朋友名叫斯里尼纳萨查亚(T.Srininasacharya)，后来在马德拉斯碰到他，也说过，因为纸不够用，所以用过的纸，拉马努金有时还用红笔再写一次。

就是在这段时间里，拉马钱德拉担心拉马努金的笔记本会出意外，就劝他抄个副本。拉马努金也听了他的劝告，不

过,抄的时候又修改又增添。而且新加的材料变成新的章节——这就是现今的第二本《数学笔记》。

拉马努金去世后半个世纪,出版了纪念他的专辑,其中的赞助人之一是拉马努金出生城市埃罗德的一家纸厂。他们登了整幅的广告,用的字眼是“使人永垂不朽的纸”以及“有了好纸,人类的伟大思想就可以永远保存流传”。这些都是恰当的宣传。

拉马努金靠拉马钱德拉·拉奥的资助大概有一年之久。在数学上他相当多产,不时给学会的杂志提出一个又一个的新问题,而且也写了第二篇论文。但是说起来,他仍然没有职业,这种情况日渐困扰着他。不久前,经过一位赞助者的介绍,他在马德拉斯总会计处找到一份临时工作,每月约有 20 个卢比的进账,可是只做了几个星期。在 1912 年年初,拉马钱德拉又去找有办法的朋友帮忙,拉马努金就写信申请工作:

执事先生大鉴:

据悉贵处近有办事员的职务空缺,鄙人有意申请。本人虽已通过注册考试,但因某些原因未能就读以取得文科一等学位。离校后,始终自修数学,未尝中断。并对此学科有新贡献。自信能胜任上述职位之工作要求。如蒙恩准雇佣,则不胜感激之至。

您最恭谦的仆人

拉马努金敬上

拉马努金的书法,完全是在校学生的书法,干干净净,只有字母 i 上的一横,写得斜一点,不平行。申请信函里同时附上王公学院的数学教授米德尔马斯特(E. W. Middlemast)先生的推荐信,说“此青年之数学天分极高”。事实上,申请信和推荐信都只不过是例行公事而已。有了拉马钱德拉的引荐,这个职位本已经决定给他了。

信的日期是 1912 年 2 月 9 日。拉马努金的回信地址是特里普利卡尔街夏宫 7 号。信是写给港务信托处主任会计的。

一开始，马德拉斯就是贸易商的聚集地和港口。不过自然条件很差，不是个好港口。海水激荡不定，暗流多变，淤沙很快。根本没有天然的码头让船靠岸卸货，所以船只要停在四分之一英里外的海上，再用木筏驳船 (masula)——25 英尺 (约 7.6 米) 长的平板用椰树的纤维绑在一起而成——由胆大心细熟识水性的人驾驶，靠近货船，卸货后再运上岸。到马德拉斯的货船，货物的损失，百分之九十是发生在最后这四分之一英里 (约 400 米) 的路上。

可是这里仍然成了港口。1796 年盖了一座灯塔，烧椰子油点的灯，17 英里 (约 24 千米) 外还可以看见。1861 年，建了一个码头，长 1100 英尺 (约 335 米)，伸入孟加拉湾。1876 年开始，又修建一个长方形的港口，每边长 1200 码 (约 1097 米)，用的是重达 27 吨的水泥方块。新港口稍有帮助，但卸货的损失仍然很大，同时港口的进口处淤沙很快。港口南边的高水位线平均每年向外伸出 70 英尺 (约 21 米)。

马德拉斯港口占了整个马德拉斯邦对英国进出口吞吐量的百分之六十。每年有 1200 艘船只进出。进口的是生铁、钢材、机器和铁路装备；出口的是生皮、布料、染料和棉花。直到 20 世纪初，运转仍然不畅，需要大大改善。所以 1904 年便聘请了弗朗西斯·斯普林爵士 (Sir Francis Spring) 为总工程师，总管所有的改进工程。这是他在印度的第二项公职。

此人秃顶，一双睡眼，一撮白色山羊胡子。马德拉斯的人全知道他，因为他是全南印度第一位有私家小汽车的人。他 1849 年出生在爱尔兰，都柏林三一学院毕业。1870 年起任职

于印度政府的工程部。此后 30 多年,对南印度铁路系统的发展有很大贡献,其中之一是建了横跨戈达瓦里河(Godavari River)的铁路桥。由于这些功劳,1911 年被封为爵士。7 年前,他又进了港务信托处,同他一起来的是 S·纳拉亚纳·耶尔(S. Narayana Iyer)。

纳拉亚纳并不是工程师,英国在印度所设立的学校,专门是为了训练各政府机关雇用的行政人才,而不是为了使印度能有不依赖于英国的工程人员。他是一位婆罗门牧师的儿子,并有特里奇诺波利的圣约瑟学院(St. Joseph's College)的硕士学位,后来留校任数学讲师。他在那里结识了斯普林爵士。在港务信托处,他先做办公室主任,后来升任总会计师,是该部门官阶最高的印度人,斯普林对他十分信赖。

纳拉亚纳对西洋服装从不屈从,总是穿长衫戴头巾,一直到 1937 年去世都不变。很多年以后,西风渐盛,连穿衣戴帽的小事都受影响。但是印度人穿长裤,外套,打领带,皮鞋,长筒靴,有时还是会受人耻笑。19 世纪 90 年代末《印度教徒报》的一篇社论所反映的态度比较有代表性:“长筒靴,长裤加上欧洲人的外套,行动十分方便,这是无可置疑的;但是东方人的装束则比较适宜休闲、懒散、缓慢的生活。西方人的打扮则表现出他们的进取和自信。”到了 20 世纪 10 年代,受过教育或开化的印度人开始相信这些看法,所以 1919 年印度数学学会开大会时拍的一张正式照片中,拉马钱德拉·拉奥,以及大多数会员都穿着西式服装。纳拉亚纳也在照片中,坐在最前排的地面上,穿的却是长袍,裹着头巾。

他的家人说起他时,总说他是一位谨慎、诚恳、自律而且严肃的人,也不是貌不可犯的那么冷峻。他很为印度的独立骄傲——但从不挂在嘴上。他的家庭很大,有 20 多位表兄弟姐妹,或是常住的门客。他是一家之主,常常要接济他们——

也从不挂在嘴上。凡是有志独立的人，他都予以帮助，他待人表里如一，言行举止都遵循传统的印度教教义。

斯普林和纳拉亚纳两人后来对拉马努金的一生有很大的影响。但是在 1912 年 3 月 1 日这一天，也就是申请工作的三个星期之后，拉马努金只知道他要在财务科做一名三等四级的职员。每月收入 30 个卢比。

这一段时间，佳娜琪不在她丈夫的身边，在自己父母亲的家和婆家之间跑来跑去，学习“为妻之道”。1912 年，她过了发育期，拉马努金也有了固定的职业，他们这才住在一起，过名副其实的夫妻生活。

特里普利卡内的夏宫离拉马努金上班的港务信托处有 3 英里（约 5 千米）路。它在圣乔治堡之北，港区建筑的对面。上班几个月后，拉马努金就搬得近一点，住到乔治城区的姆达里街（Saiva Muthiah Mudali Street）的一间小房子，跟他祖母在一起。这条街不在宽街上，属乔治城区。结婚三年之后，佳娜琪和拉马努金的母亲柯马拉塔马尔终于在这里同住了。

直到 1906 年威尔斯亲王，即以后的乔治五世，亲临马德拉斯之前，乔治城区一直叫黑城，这是原来划给“黑”人，即本地人住的地区。城堡那一带，是划给欧洲人住的，叫白城。黑城占地不到全城的十分之一，但居民则为全人口的三分之一。公羊母牛，鸡鸭狗猫到处乱跑。有的街上全是打铁铺，工人或站或蹲就在小店前打铁，碎片再丢到炉里去化。旁边另一条街，全是驮了一袋一袋米的牛。再一条街全是首饰摊子或布摊子，掺着些卖油的、编篮子的，水果、蔬菜贩子等等，都是靠力气找生活的黑头发伙计；他们赤着脚，光着上身，露出棕色发亮的皮肤，或是拉车，或是被重担压弯了腰，一面用鞭子吆喝着牲口走过灰尘漫天的街道。

姆达里街的这间小房子，每月租金3卢比，拉马努金一家真是挤在一起。佳娜琪那时还不满13岁，他们很少能在一起。彼此都不大讲话。白天里，他可能请她替他拿块肥皂、拿件衣服什么的。晚上，她记得她总是和柯马拉塔马尔睡——这是她婆婆规定的。他们俩从来没有单独相处过。有时柯马拉塔马尔要去贡伯戈纳姆，他的祖母就守在旁边监视。

这些都是不足为怪的事，一直要等她自己有了孩子之后，住在夫家的新娘，才不是婆婆的奴隶，凡事惟命是从，做事都该是她。

后来，拉马钱德拉·拉奥替他在处里找了一份“拿干薪”的工作。这真的是只拿薪水不做事的职位。不知是一开始就存心如此，还是后来变成拿干薪的。其实即使是只应卯而已，对拉马努金来说已经是够忙的了。“我常看到他从海滩路跑去上班，”曾和他在夏宫同住过的一位朋友说，海滩路是到港务信托处边门的一条街，“穿了外套，打了领带跑着去上班，长长的头发全吹散，额头上的印记看得清清楚楚，这位天才是没时间可浪费的，他总是时间不够。”

佳娜琪后来也常说，每天早上上班前，他要搞一下数学。回家后，又马上弄数学，有时做到早上6点才胡乱地睡两三个小时就去上班。在办公室，他的工作只是查查账，点点现金而已。有一阵，另一位职员请假，请他代理了一个月，专管领航费特别账户。事实上，他的工作相当轻松。不久之后，在办公室也搞数学。纳拉亚纳和斯普林爵士两人都睁一只眼闭一只眼地随他便。

有一个故事说，有人在上班时间看见拉马努金在码头上走来走去搜集包装纸用来算题目；还有一次，斯普林把纳拉亚纳·耶尔叫进自己的办公室，措辞严厉地问他为什么有些写满数学内容的纸会夹在他的重要文件里面？纳拉亚纳·耶尔不认账，而且说不是他的笔迹，可能是拉马努金的。斯普林大

笑，当然是拉马努金的，他早就知道了。

纳拉亚纳·耶尔是数学会的会员，而且做了好几年学会的会计。他不但是拉马努金的顶头上司，也是同事。傍晚时分，两人聚在纳拉亚纳·耶尔的家里。坐在二楼的阳台上望街、石板夹在膝盖间。有时坐到半夜，石笔刮石板的声音让别人都睡不着。有时，他们都睡了，拉马努金会醒来，在阴暗的防风灯下记下刚想到的什么，对人说是他梦到的。

纳拉亚纳·耶尔的数学底子并不浅。可是和拉马努金一起工作时，发现无法接受那种一跳十几步的思维，就像华生医师无法接受福尔摩斯的推理一样。纳拉亚纳·耶尔常问为什么他总希望别人能和他自己一样理解得这么快？“你应该降低水平，你的两步等于人家的十步。”为什么？拉马努金回答说，这不是很明显吗？纳拉亚纳·耶尔说当然不是那么明显。他很有耐心地劝导拉马努金，有时拉马努金会稍稍让步。

不久之后，纳拉亚纳·耶尔不但是他的上司，他的同事，也是他的指导，他的顾问，他的良友。佳娜琪记得这位朋友说过：“好些人初见到他[拉马努金]时，以为他普普通通，相处久了才知道他是颗钻石。”他使斯普林也同意这个看法，让他全力支持拉马努金。

由于斯普林爵士的赏识，以及他广泛的关系，1912年中旬，拉马努金才进入了“英国印度”。他的一生，和英国的接触太少，如今开始有了变化。

## 6. 英 国 统 治\*

马德拉斯总督府之西，是总督的夏宫，叫做乌塔卡蒙德

\* 原文作 British Raj. Raj 是主权之意，特指英国在印度的统治。——译者

(Ootacamund),简称“乌塔”,高踞在尼尔吉里丘陵上。英国人不怕北海吹来的冷风,却受不了热带的炎热,就到这里来避暑。山的另一边是马拉巴尔海岸,一片由北到南潮湿多雨的田地,长满热带蔬菜,盛产胡椒、豆蔻等各种香料。这就是印度吸引欧洲人前来的另一个原因。附近的迈索尔区森林茂密,有檀香木和红木,还有英国人喜爱的老虎和大象。

1600 年起,东印度公司成立,英国人便来到印度。为了控制这片次大陆,他们和法国人、荷兰人、葡萄牙人以及其他国家的人有过很多次的冲突,直到 1876 年,印度终于成为大英帝国的一部分。如今,1912 年,距印度人称为第一次独立战争的兵变(史称 Sepoy Mutiny,是印度人反抗英国统治的斗争)已经 50 多年。前一年乔治国王进人为他在孟买修建的印度之门(Gateway to India),并到新首都德里行加冕礼。总督寇仁勋爵(Lord Curzon)说过,没有英国的印度这个观念本身就是印度人“背叛了我们的信任”。谁想得到,在甘地(Gandhi)和尼赫鲁(Nehru)的领导之下,印度会在 1947 年脱离大英帝国宣布独立?而当时几位白皮肤的执政者就是英国统治的最后几年?

英国管理制度的特色是行政人员很少。印度的文职人员(Indian Civil Service 简称 ICS)才不过 1000 人。英国人做工程师、医师或警察,配以印度人的事务员构成管理系统的中枢,操纵一切。总督和马德拉斯或其他邦的行政首长不算 ICS,其他的关键职位都算。这些都是由东印度公司的商业代理人蜕变而来。1853 年允许印度人参加甄选考试取得 ICS 的资格。但全国不能超过百人,薪水也只有英国人的三分之二。

由于对于“文职人员”字面上的误解,人们往往把 ICS 与官僚、无能、平庸联系在一起。事实上,ICS 吸引了好些英国

的优秀人才。很多是出身上等阶级的有识之士，来自最好的公立学校，或是剑桥或是牛津的毕业生。他们都通过了竞争激烈的考试。闲暇之余，他们会翻译梵文作品，讲解庙宇里的碑铭，写文法书或编字典。有人后来评说，这些人“自命为柏拉图式的理想统治者”，不但出身高贵，而且富有责任感，深得别人的信任，以既有献身精神又能处事公正而著称于世。

这种背景又造就了他们的另一面——令人无法忍受的自傲和清高。“这些文职人员，”一位退休的文职人员写道——总认为自己是英国人，所以责任感很重。薪水高，所以无需不清廉。亲戚朋友之间也很少求惠于他们，故而总能维持公正、建立一个清廉并有效率的政府。

县级的政府官员代表称之为征收员，权柄之大好似一位王子。可是，19世纪的一篇报道说：“征收员以及他手下的英国人几乎没有一个会讲本地话。本地人认为他们太让人敬畏，不友善。”另一篇报道又说：“征收员和老百姓之间的鸿沟很大……在本地人的眼里，这些英国官员是无法理解的，无法接近的，自私、自大，又无法左右。”

英国人在印度的存在，其中心的事实就是，和印度人保持一段距离。从至今还留下来的当时圣乔治堡的那些照片和印刷品看得出来，英国人总是与印度人隔离开。比如隔着一个花园，保护他们的安静。还有一张印度人围观一个玩蛇者的照片，一个英国人在侍从的保护之下，远远地在二楼的阳台上看。在这些写照里，本地人做工——挑担子啦，头上顶着重货啦，摇木筏进港啦……英国人多半是避在一边，站在伞下遮阳；再不然就是戴着礼帽懒洋洋地靠着柱子站着。

英国人个个雇佣洗涤女工，每月四五个卢比，并供食宿。这些女工好比他们的私有财产，在印度住久之后，这些英国

人连刷衣服叠衣服都不会做了。在他们最终乘船回国时,看到船上的英国人侍者竟然弯腰给他们倒茶,实在大吃一惊。(多年之后做的调查,问从亚洲或非洲回来的学生,什么事让他们对英国最感到奇怪,差不多全都说的是看到白种人干体力活。)

印度人与英国人之间的隔阂,英国人自己也毫不讳言。“东是东,西是西,两者不能混而为一。”这是吉卜林(Rudyard Kipling)<sup>x</sup>写的。印度通赫伯特·康普顿说过,印度人可以和你同住,一起工作,但是,“到头来,黑白同化是没有的。在感情上、好恶上、生活习惯上、表情上,彼此永远是不同的种族。彼此之间有着不可跨越的鸿沟——一种姓和风俗的鸿沟。融合或亲近都是不可能的。”

接下来的几年里,拉马努金必然会面对的就是这“巨大的鸿沟”。他成长在维多利亚女王的统治之下,口袋里的硬币上面全是英国女王的头像,直到1902年,硬币上都印有吾皇维多利亚字样。女王去世之后,则改为爱德华七世的侧影,也改用吾皇吾王的字眼。读高中时,他得到的奖品中,有一本英文的爱国诗集,一本麦考利勋爵的散文集,一本华兹华斯诗集——完全没有印度的东西。他在贡伯戈纳姆的政府学院念书时,学院要修建一所新宿舍,募款也是用维多利亚女王的名义,而不是什么印度名人。

面临这些,对拉马努金来说,英国仍然只不过是一种象征,一种抽象的影子。他认得的英国人不多,现在要开始改变了。他的朋友纳拉辛哈(Narasimha)把他介绍给马德拉斯基督学院的E·B·罗斯先生,他又碰到王公学院的米德尔马斯特先

<sup>x</sup> 吉卜林(1865~1936),英国作家和诗人,曾获1907年诺贝尔文学奖。——译者

生,而且还得到一封介绍信。如今在港务信托处,又认识了斯普林爵士。不久之后还碰到爵士的其他朋友。

不管英国人用什么样的偏见,歪曲他们对拉马努金的印象,可是对他的才智却没有看走眼。当时的一位英国作家说过,这些印度人“有辩才,会争论。他们的智力,若经过好的教育,很能大大发展……在这方面,印度人认为英国人很丢脸。如果印度政府的每个职位全由公开考试来甄选的话,所有的行政机关必定全都是孟加拉的印度绅士或马赫拉塔(Mahratta)的婆罗门”。

不过,英国人对印度人的推崇也只到此为止。康普顿在印度开种植园好多年,在1904年出版的一本书里说过:“印度人的智慧虽然可以通过教育而大为增进,可是他们的习性总达不到很高的道德水准,或不可能取得应有的刚气以胜任工作上的需要。”有一位退休的 ICS 富勒爵士(Sir Bampfylde Fuller)发现印度人常成群结队去讲堂,上图书馆,钻研西方文学或科学;可是令他引以为奇,且无法理解的是……他们总摆脱不掉身为印度人的习性。印度人太容易动感情,常常言行不一或反复无常。“一个英国人,眼见教育程度相当高的印度人会在言行上有如此大的矛盾,而且还认为这些只是无所谓的小事,实在是非常惊讶……他们接受欧洲人的理想,可是生活习惯丝毫不变。”

印度人品格中被英国人所洞悉且受到称赞的地方,听上去却有点褒中带贬。一位英国人说,南印度的达罗毗荼人“工作很勤劳,温顺持久,有警觉性,能自制,不像欧洲人那么蛮干。他们爱动物,有一种天生的谦逊。做仆人的,如果主人对他好,比欧洲的仆人忠诚得多。”虽然讲得这么好,但是这些品质仍然不能使印度人和英国主人相提并论。

拉马努金的才智很高,但品格和习性上确有可商榷之处,

各阶层的英国人眼中的拉马努金都有两个方面。

## 7. 寄往英国的一封信

由纳拉亚纳·耶尔、拉马钱德拉·拉奥和王公学院的数学教授米德尔马斯特以及其他人的见证,到1912年底,港务信托处的同事们都知道拉马努金是个特殊人物。斯普林爵士和其他英国人面临的问题是:他有多么特殊?特殊在什么地方?以及我们要怎样对待他?他的天赋是微不足道的还是深奥的?是天才还是鬼才?拉马努金只有一些微不足道的小聪明,还是需要培养,需要指导的不凡之人?

没有人愿意孤注一掷。解释得难听一点,大家的看法固然都相当坚定,但如果事实证明他们错了,历史将对他们作严厉的判决。解释得温和一点——也可能更确切一点——是他们不知道,而且,他们也明白自己不知道。

但是纳拉亚纳·耶尔当然认为自己知道,因为他每天都和拉马努金搞数学,能仔细地观察他的数学能耐。很明显,如果拉马努金要在数学上有所成就,一定要有英国人的大力支持,所以纳拉亚纳·耶尔就为他在斯普林爵士前游说。

拉马钱德拉·拉奥利用他的关系也希望斯普林爵士能听信。1912年11月12日,马德拉斯工程学院的一位41岁的土木工程教授格里菲斯(C. L. T. Griffith)显然是在拉马钱德拉·拉奥的怂恿之下写道:“爵士大人亲鉴:贵处会计室有一位年轻人,月薪25卢比,名叫拉马努金,是一位很有希望的数学家,他做会计工作或许有些不称职,但希望能让他保留这个职位,直到有机会发挥他的非常才能。”他也指出,很少人能了解他的数学,更谈不上作出有意义的评论。他同时又写信给另一位数学家伦敦的M·J·M·希尔(Micaiah John Muller Hill)征求

意见，并将拉马努金写的东西请希尔评论后再给他回音。“如果他是真正的天才，”格里菲斯写道，“我们有必要给他钱让他有书本和时间，但是在没有听到回音之前，”他又补充道——似乎想把赌注减少——“我不确定是否值得为他花钱或花时间。”

斯普林爵士所找的人还有一位伯恩(A. G. Bourne)，他是马德拉斯的公共教育处主任。伯恩建议他带拉马努金去见两位指定的马德拉斯数学家，或至少去看其中之一。他又说，“如果他的天赋真的神秘得无法捉摸，连常识丰富的数学家都无法辨别的话，我便怀疑其天赋是否是真的。”

两个星期之后，拉马努金便云拜访马德拉斯的总会计格雷厄姆(W. Graham)。这是伯恩所提议的两位数学家中的一位。“他(拉马努金)是不是真材实料的数学家，我不能确定，”格雷厄姆见过他以后写道，“他给我的印象是一位有脑筋的人。”给我的印象……这个评价所用的字眼相当谨慎，万一他看错了，也没有人能讲他说错了话。他又说：“他的脑筋似乎和速算神童的脑筋相似。”这一句就说得更含糊了。

格雷厄姆所指的是一些具有所谓特异功能的人，如今有人称其中的一些为傻瓜智者。他们对高等数学毫无所知，但是有特殊的速算功能，诸如无误地做十位数的乘除，或说出一千年前的某件大事发生的月日是星期几，以及类似的计算而全都不错。

这正如某些大艺术家却画不好直线或人物肖像一样。会做算术——求平方根，平衡收支，解应用题——不能算是真懂数学。有些数学家在这方面也许很有才能，就像艺术家中也有人很会画人物素描一样，但是能速算并不就能算是数学天才。

拉马努金的计算速度并不差，但是没有快到异常的程度。

别的方面也算不上是“计算神童”。1912年底，马德拉斯的这些英国官员正不知要如何处置拉马努金时，这是他们的又一层考虑。

格雷厄姆也写了信给格里菲斯。格里菲斯第二天就回信给斯普林爵士说，“我想我写信给希尔教授是对的，”他说，“我们一定要听他的意见。”

20年前，在伦敦大学学院，希尔是格里菲斯的教授。这位老师以仔细管教学生出名，而不是以数学上的成就出名。12月中旬，格里菲斯终于得到回音。希尔说他无法看完格里菲斯寄给他的全部资料而深以为歉，但是稍经浏览便发现拉马努金已堕入陷阱；有些结果在他看来是荒唐的，如果有意更正他的不足之处的话，他建议拉马努金先读一下布罗米奇（T.J.I.A. Bromwich）的《无穷级数论》（Theory of Infinite Series）。如果以后还想发表文章的话，最好先和伦敦数学会的秘书联系。希尔又警告说“要十分当心所写的内容，不要出错。字迹要写得很清楚，不要用没有预先解释的符号”。——不要像格里菲斯寄给他的关于伯努利数的那篇文章一样。

希尔先生的信没有回答问题本身：拉马努金有没有什么东西可以贡献给世界？他有没有才华？他那才华的本质和含量如何？“关于他本人的事，你讲的都很有趣”——或许只是他个人求知的心路历程而已——“我希望他的工作会有成就”，希尔添加的话仅此而已。

几天之后，希尔给他的学生又写了一封信，内容很奇怪，不很肯定但鼓励性稍大。一方面他说有关伯努利数的那篇文章破绽百出，“他实际上是假定一些伯努利数的性质全是对的，却未加证明，由于这个（或其他）原因，我可以确定的说，伦敦数学会是不会在他们的会刊上发表这篇文章的”。可是在另一方面他又说拉马努金“显然是热爱数学的人，也有一定能

力”，他受的教育不够而因此受害，他一定要读布罗米奇的书。这一次，连应该读哪一章哪一节才能纠正拉马努金的错误都点得清清楚楚。

接着，希尔提到一点自己的经验。这些话比较耐人寻味，“当 1876~1879 年间我在剑桥做学生的时候，人们对这些问题还没有完全清楚地了解，”他针对拉马努金文章里的微妙且重要的关键写道，“现代的理论最近才有了稳固的基础。早年，许多勤奋的数学家都遇到类似的困难。所以像拉马努金这样完全自修成材的人，会得到错误的结论是不足为奇的。我希望他不会因此而气馁。”

希尔在剑桥的时期是 1876~1879 年，正好和卡尔的时期相同。卡尔的书对拉马努金影响很大，由此可见拉马努金因缺乏新的启发而付出的代价。40 多年来，欧洲重要城市里所流传的数学他完全没有接触到，他的数学完全被封闭在过时的包裹里。所以不足为怪，他完全迷失了方向。

希尔本不大记得他的老学生格里菲斯，看到拉马努金的文章，相当好奇而写了两封很长的信。但是也只到此为止，并没有收他做学生。他曾判断说拉马努金的第一篇文章不适宜发表，而且他也不完全了解拉马努金的成就。可是他回信中提供给拉马努金的忠告，恐怕是拉马努金一生里所受到的最严肃最有道理的忠告。马德拉斯的英国人开始不再猜想拉马努金也许是个假天才了，这些回信中的鼓励足以打消他们的怀疑。

好久以来，许多人对拉马努金说，印度没有人能了解他，也没有一位专家能给他足够的鼓励，所以他应该写信到剑桥或其他的西方学府寻求帮助。第一位是他在帕协阿帕学院时有过来往的老教授辛加拉维鲁·乌达利尔，第二位是贡伯戈纳姆的老师巴万尼斯瓦米·拉奥(Bhavaniswami Rao)，第三位是和

他同住过的朋友纳拉亚纳·耶尔。最近纳拉亚纳也给他相似的劝告。

如果拉马努金曾犹豫要不要向西方国家求助，希尔从英国的来信就打消了这个犹豫。事态已相当明显，印度的数学家帮不了他的忙，说不定欧洲的数学家会更同情他而听信他。

印度离欧洲有四分之一个地球之遥。不过寄信很便宜也很可靠，而且——这还不是在航空邮件时期——很快。一封信到英国如果要花上两个星期的时间，就有人埋怨。所以到1912年终和1913年初，拉马努金便开始使用国际邮政。他的信稿先由纳拉亚纳·耶尔，或斯普林或塞舒·耶尔修润之后，再寄给剑桥大学里的顶尖数学家，同时附上他研究结果的样本。

他写信给H·F·贝克(H.F.Baker)，一位声誉极高的数学家，身为皇家学会的会员，直到两年前，一直是伦敦数学会的主席。贝克先生能帮助他或给他什么指点吗？

贝克先生可能是给他礼貌性的回信，说爱莫能助，可能是把寄去的资料不加评论地原件寄还，或者根本没有回音。总之贝克先生没有帮他的忙。

拉马努金又写信给E·W·霍布森(E.W.Hobson)，也是一位同样有声望的数学家，也是皇家学会的会员，并且是剑桥大学纯数学的萨德勒尔讲座的教授。

霍布森也说爱莫能助。

1913年1月16日，拉马努金又写一封信给哈代(G.H.Hardy)。那时哈代才35岁，比其他两位要小一辈。但是已经执英国数学界的牛耳。哈代能帮他吗？

哈代说能。

## 第四章 哈代 (G·H·哈代~1913)

### 1. 永葆青春

他是一个永葆青春的学者。

1901年春某日，哈代带他的朋友利顿·斯特雷奇(Lytton Strachey)\*到三一学院后面的一片私用草地打滚球。只有三一学院的教职员才有这个特权。“他是个大数学天才，”斯特雷奇写信告诉他母亲说，“可是看上去像一个3岁的孩子。”直到他已经30岁时，还有人不肯卖啤酒给他，至少有一次，当他和三一学院里其他资深人物同进午餐时，就被别人错看作是学生。

他有一副冰清明亮的眼睛，面孔线条优美，一头梳剪得很整齐的头发。他是很英俊的。但是在1913年那段时期，他自己却不认为如此，甚至连镜子都不愿意照。他的宿舍里根本没有镜子，如果住在旅馆里，他把每面镜子都用毛巾遮住，他摸着脸刮胡子。可是这只骗得了自己。过了50岁，他的相貌依然出众。一位当年的朋友、小说家C·P·斯诺(C. P. Snow)，说他的皮肤“呈印第安人的棕色，脸部很漂亮——高高的颧骨，细长的鼻子，清秀严肃……[剑桥]不乏英俊漂亮的面孔，相比之下哈代仍然非常出众”。用任何尺度来看，他不能算斯

\* 斯特雷奇，1880~1932，英国著名传记作家、批评家。——译者

文,但至少不“粗鲁”;相形之下,他的面容太娇柔,薄薄的撅嘴唇,嘴角稍稍向下撇,似乎老在批评别人。

哈代一直在批评,在审量,在比较。他将每位数学家,他们的成就,他们写的书或论文都一一分等相比。什么事他都有明确的观点,也敢于直言。他参加的某一俱乐部考虑变更部徽,哈代一共写了6页纸申述他的反对意见。学坛上,一项历时几乎两个世纪的传统,一项不可侵犯的条例,他认为有错,要加以纠正,一直坚持了20多年。他的热忱、乖戾和怪癖就是这样——尖锐、猛烈,从不摇摆不定。他憎恨战争,憎恶政客,讨厌英国的天气。他喜欢太阳,他喜欢猫,讨厌狗,讨厌手表,讨厌自来水笔。他喜爱伦敦《泰晤士报》(The Times)的填字谜。

柯南道尔(Arthur Conan Doyle)死后半个世纪,有人写了一篇福尔摩斯式的推理小说,题为《哲学家的指环》,故事里的主角一位叫拉马努金,一位叫哈代。作者是兰德尔·柯林斯(Randall Collins),他把哈代写成一个蹩脚的白衣板球手,在三一学院里的会员花园里跑来跑去,一身白色法兰绒的衣帽,拿着板球棒,要找他的手套,一面大喊:“快要比赛了,我还找不到,来不及了,来不及了!”柯林斯在序言里发誓说这全是事实。是哈代的故事,大概离事实不远。

哈代是个几近病态的板球迷。他自己打,看人家打,他研究它,他生活中不能没有它。他分析各种战术,他评判每个冠军队。在他写的数学论文里常用板球术语作比喻。他为瑞典的数学期刊写的一篇文章里有这样的话:“这个问题用板球的术语来解释就很容易懂。”外国读者当然一点都不知道他在说什么。他给数学证明的最高评语是“属于霍布斯级别的”——人家都以为他是指哲学家托马斯·霍布斯(Thomas Hobbes),其实他说的是萨里郡的板球名将杰克·霍布斯(Jack Hobbs)。哈

代可能在 60 多岁时还打板球。他还请妹妹在他死后也告诉他板球消息。

哈代也评论上帝，认为他并不存在。他不是一般的无神论者，而是一个很激进的无神论者。读大学的时候，人家告诉他，如果不愿意做礼拜，先得禀告他虔诚的双亲。他不知道该怎么做才好——最后决定写一张字条，告诉他们一个惊人的消息，说他被告知，上帝是他的私敌。可是他的朋友，包括教会里的，都知道他那离经叛道的装模作样是他百玩不厌的老把戏。一个晴朗的星期日，教堂 6 点的钟声打断了球赛，他对朋友说：“我这一生最好的时光不得不在天主教堂的钟声下消磨。”

他很害羞，有点神经过敏。不喜欢无聊的谈话，当然谈论板球不算是无聊话。他痛恨官样文章，不喜欢跟人握手。走在街上总是朝下看，免得跟别人寒暄。他是“最奇怪也最吸引人的家伙”，他早年在剑桥的朋友伦纳德·吴尔夫（Leonard Woolf）如此写道。这是在吴尔夫娶弗吉尼亚（Virginia Stephen）<sup>\*</sup>之前，还没有发动布卢姆斯伯里（Bloomsbury）文学运动。随着时间的推移，哈代的这些奇行怪癖就成了记忆中的化石，或漫画，或流传的轶事。但是在他接到拉马努金的信时，他的性格，气质和价值观均已经相当成熟。

哈代的这一面，拉马努金当然一无所知。他只知道哈代是位数学家。1913 年虽然年方 35 岁，已经是名声赫赫。发表数学论文已有 15 年，共百余篇之多。书也出了 3 本。他是三

\* 弗吉尼亚·吴尔夫（1882～1941），著名英国女作家，意识流小说代表人物之一。她的丈夫就是哈代的好友英国著名作家和记者伦纳德·吴尔夫。1904 年后家居伦敦文化区布卢姆斯伯里，她的家成了一个文化中心，人称布卢姆斯伯里文学运动。——译者

一学院的研究员。三一学院是剑桥的数学圣地,所以也是全英国的数学圣地。1910年,他被提名参加皇家学会。这是英国科学界的最高组织。除了诋毁上帝,欣赏板球或餐会时发表高论之外,哈代最关心的就是数学真理。自身固然是数学家,他对其他数学家的影响尤其大,以他为中心而形成一个学派。他担任伦敦数学会的理事长3年,后来也在数学界担任其他重要职务。“我献身数学是全心全意的,是绝无保留的,”他写道,“我相信它,喜爱它,我不能没有它。”他自己说他在数学上的研究工作“是一生中的一大乐事”。

他很会讲话,一阵阵妙语如珠,好像[板球]投球手发出的球一样——富有感染力、挑战性而又十分肯定。他是绝对的诚实、绝对不侵占他人的成就。有一次辩论会上,他竟然承认赞同上帝的那一队讲得好。他总是趣味盎然。但是他的风趣——与女人那闪亮的薄纱外衣相反——其作用是遮掩,而不是泄露。他的一位研究生说,交谈是“他喜爱的活动之一,不过想弄清楚他的真意却不容易”。

C·P·斯诺说过,和爱因斯坦(Albert Einstein)相处愈久,他愈显得与众不同;但是和哈代处得愈久,他就愈见亲切——更像常人一般,“彬彬有礼却又不装腔作势,行事小心翼翼”,他那动人的风采和睿智,他的自我保护,他内在的单纯,他对人的关爱和慈善,都让人感到亲切。有一张哈代中年时期的照片,他斜靠在有绣花椅垫的藤椅上。右手弯放在腰部,拿支香烟。翘着二郎腿。左手放在椅背上,角度似乎很不自然。一绺头发垂下前额。看上去一点都不放松,哈代的照片没有一张是放松的。尤其是那双盯人的眼睛,正如吴尔夫所描述的好似“吃惊的小鹿”,他如此地坐着,紧锁眉头,咬着嘴唇,从眼镜上面翻眼瞧人,一副不可侵犯的神气。有人无意间看到这张照片时评论说:“只有念公立学校(相当于美国的贵族化私

立学校)的人才有这种坐姿。”

哈代出身于英国最好的公立学校,但是他走的路并不寻常。哈代家族没有出过贵族、高官或绅士,不算穷也不算富。比起拉马努金,在一定意义上可以说门第还要低些。在讲究种姓的印度,拉马努金毕竟算个婆罗门。在注重社会地位的英国,哈代只是书香门第而已。事实上,哈代曾被用来做一个榜样,“看英国的教育制度到底可以将人们的才智发展到什么高度”。他的才智熠熠生辉,一开始就被注意。他的成就使英国传统的阶级系统被淡化,使局限于高阶层的机遇逐渐向下层渗透。

123

## 2. 蹄 铁 巷

1896 年,哈代和他的同班同学在一硕大的、皮封面的本子上签名。从 1882 年起,三一学院的新生都要在这个大本子上签名。皮封面就有四分之一英寸(约 6 毫米)厚。他们要把从前进过的学校名写下来,诸如伊顿(Eton),哈罗(Harrow),马尔波罗(Marlborough)等等。哈代写的是温切斯特(Winchester)。每页有 26 个名字。有一两个人没有写校名,只在空格里写上“私人教师”或“私”字,相对而言,伊顿、哈罗和温切斯特就被称为“公学”。所谓的公学,虽然已经有好几百年的历史,但只是从 19 世纪初托马斯·阿诺德(Thomas Arnold)在拉格比学校(Rugby School)发动改革之后,它们才日益成为强有力的社会公共机构。到了哈代的时代,这些学校成为塑造上层阶级年轻人的体力、智力和品格(甚至发音)的严格场所。

英国在维多利亚女王统治下的 64 年里也发生了变化。新近发达的农民和商人,虽然无力将自己的儿女送到伊顿或哈罗,但对穷人们进得起的文法中学提供的最起码的教育又

不满意。在 19 世纪五六十年代引发了许多辩论,研究如何解决新兴中产阶级的各种问题,为他们兴建新学校。

克兰利中学(Cranleigh School)就是新学校之一,位居伦敦西南的萨里郡。“上等阶级可以进很有名的公立学校,下等阶级的教育规范也有很大的进展,反而农民或商人子弟们的教育制度未能完善。有时雇工的子弟反比雇主的子弟受到更好的教育。”这所新学校在 1863 年开学时就有如此的论调。那时校名是萨里郡立中学,建校的目的就是改善上述之不平衡情况。后来真的有了改进。例如 1880 年收的 113 个学生中,55 个是商人子弟,20 个是公务员子弟,14 个是农家子弟。

1871 年,学校的助理副校长兼教地理和绘图的是一位年方 29 岁的艾萨克·哈代(Isaac Hardy)先生。他原本在林肯郡(Lincolnshire)一所文法中学任教。三年后,校方每年又加他 50 镑薪水,这是原来薪水的一半还多。他不久就要结婚,并且要搬到校外去住。1875 年 1 月,小他三岁的索菲娅·霍尔(Sophia Hall)就成了他的太太。那时她是林肯主教区师范学院的校长。一年多之后,她有了身孕,1877 年 2 月 7 日生了戈弗雷·哈罗德·哈代(Godfrey Harold Hardy,人们称他 G·H·哈代)。两年后他又有了个妹妹格特鲁德·伊迪丝(Gertrud Edith)。克兰利是个只有两千居民的小镇,他们就在学校对面的那条街上长大。

萨里郡的北界是泰晤士河,它向东蜿蜒流入伦敦市区。在 19 世纪 40 年代,铁路开始由各大城市中心往外伸展,40 年里,全郡的人口增加了一倍,总计 342 000 之多。用当时的尺度来衡量,这是惊人的增加了。可是在郡的另一端,在克兰利,变化就很缓慢。到 1865 年,铁路离克兰利只不过短短的 40 英里(约 64 千米)而已,那是从伦敦来的布赖顿(Brighton)铁路的吉尔福德(Guildford)和霍舍姆(Horsham)支线。富有的

大工业家也开始买田庄盖大厦。可是哈代的年轻时期,那一望无涯的乡村,仍然保留着自然风光;没有铺路面的泥路、风车、地主的领地和茅草顶的村舍,一派和平景象。

哈代的双亲生活在萨里,享受当地的甜美,却不是萨里人。他们来自伦敦的另一方,老家在 150 英里(约 240 千米)之外。他们没有钱念大学。艾萨克的父亲是铸造工人。索菲娅的父亲本是郡里监牢的牢头,在她结婚时是烤面包的工人。幸好两位年轻人都很聪明,都希望得到更好的生活——身为教师,总算在学术界找到较低的栖身之所。

照斯诺的描述,艾萨克·哈代是个“性情温和,不拘小节,也不切实际的人,稍微有点江湖气”。他也是个快乐的人,有精致的审美观和乐天的人生观。在学校里他是领唱的男高音,刚来克兰利中学时,每星期还教两堂唱歌。他编辑校刊,踢英式足球,对兄弟会很热心,是皇家地理学会的会员。在他 59 岁去世时,送葬的人都非常悲哀,街上的商店都拉下百叶窗帘停业哀悼。“他是一位难得遇见的老好人,”他的校长说,“从来没有说过一句重话,从来没有让别人难过,从来没有敌人。”有人认为他代表了维多利亚时期的多愁善感,但是有一张照片,哈罗德还是小孩时照的,那上面的艾萨克眼睛发亮,薄薄的头发,让人敬畏的大胡子,像圣诞老人似的。

在同一时期,他太太在克兰利拍的一张照片便显出当时摄影师的呆板。索菲娅穿了一套绣花长衣,头发朝后梳。薄薄的嘴唇稍稍下垂。略有惊恐的眼色,这些传给了她的儿子。她和拉马努金的妈妈一样是个很虔诚的妇人。星期天她总要把哈罗德和格特鲁德带去教堂两三次。当她在 1874 年 12 月离开林肯主教区师范学院要结婚的时候,学校为了她“崇高的基督徒行径和信仰”而致谢,也说四年来自她给学生相当的影响,使他们算术成绩好,同时“她的坚定和仁慈适度地配

合……管理学生时既安详又具有权威”。总之，可以看得出索菲娅是个不苟言笑，正直，也相当能干的女人。

她和丈夫一样追求高品位的文化素养。她教钢琴，听音乐会，例如学校里举办的韩德尔(Handel)的《弥赛亚》(Messiah)演奏会，那时哈罗德才满周岁。她和艾萨克同为老师，又热心追求艺术和其他的知识，所以他们都远远超越了自己出身的根基。身为父母之后，一方面以自己的成就为荣，当然更热忱细心地关心子女的教育。

他们希望至少能将智慧上的感悟力传给儿女。他们做到了。

1891年5月，格特鲁德该进圣凯瑟琳中学(St. Catherine's School)了，这是克兰利中学的姐妹学校，在5英里(约8千米)外的布拉姆利(Bramley)。她在这所学校里成绩很好，并且得到绘画和拉丁文两门课的奖状。1903年，在她取得伦敦大学学士学位之后，又回到母校做绘画老师，而且终身没有离开。1926年，她编辑校刊，写诗，写故事和散文，写得都很不错。她的社论也很有风格。她的诗，文艺气息和书卷气都很重，流露出她研读的爱好。在下面这首她并不擅长的打油诗中，好好地挖苦了一些自以为是，却一知半解的学生：

有位姑娘我受不了，  
她的名字我不敢讲。  
我想去看她的爹娘  
为找话讲我搜尽枯肠。  
.....  
她说“我从不念数学。  
可我那老爸还更差  
甚至不会做加法！”  
她说“老爸是傻瓜！”

“我的听写得两分；  
一个动词都不认得；  
问我 *rego* 的将来时  
我说就是 *regōbo*”

“可我比我妈还算强  
她全然不懂外国语。”  
好姑娘，要是他们早早上西天  
世上就会有好日子过。

哈代夫妇对孩子的要求一定是很苛刻，也很严格，不然不会写出这样的诗。实际上他们的教育理论和管教孩子都十分坚定，所以斯诺先生都说他们“似乎有点过分”。没有女管家，一位保姆兼教哈罗德和他妹妹读书写字。家里的书不算多，但都是“好”书。小时候，哈罗德就念《堂吉诃德》和《格利佛游记》给妹妹听。玩具坏了就不让玩，无形中似乎存在一个至善的标准要求他们衡量所有的行为——不合这标准就要摈弃。

哈代两岁时，就能写百万以上的数，这是有数学天分的征兆。在教堂里，他忙的是将圣诗号码的数目分解成因数：第 84 首颂歌？84 是  $2 \times 2 \times 3 \times 7$ 。在学校里，年轻的哈代似乎从来没有在自己的班上上数学课，而是由学校里专管数学教学的克拉克(Eustace Thomas Clarke)私下讲解。克拉克来自剑桥大学的圣约翰学院，是数学荣誉学位考试中的优等生(Wrangler)，算是数学高才生。他卓越的数学才能、旺盛的精力和魄力，有口皆碑，大家都相信他能把这些好品性灌输给他学生。

哈代的特长并不只是数学而已，几乎所有他接手的，他都可以发挥。但是身体羸弱，生性羞怯成了他的绊脚石。他过分腼腆又十分敏感，几乎连在全校同学面前上台领奖都害怕。有时他故意答错以免上台。他的朋友斯诺后来这样说他：“过

度的脆弱，脸薄得像一层皮都没有。”

他的妹妹也是一样，她的一个学生说她“那么羞答答的”。在她进圣凯瑟琳中学时，她追忆道：“我是十分的羞怯，而我出身的环境没有给我进这个女校的准备。”这“出身环境”对两个孩子的影响都很大。两人都终生没有结婚，都在学术界过了一生。两人都很敏感，都陶醉在文化的氛围里，而且——大概是受妈妈过分虔诚的影响——都轻视宗教。

哈代从小就是无神论者。有一次他同一位牧师在雾中散步，碰到一个小孩，手上拿了绳子和木杆。这位牧师就说上帝好似风筝，感觉得到却看不到。在雾里，他对年轻的哈代说：“你看不见风筝在飞，可是能感觉到风筝在拉动绳子。”可是哈代心里想，这么大的雾，根本没有风，风筝哪里能飞。格特鲁德的想法也一样。当她已经是一家养老院里住着的老年妇女时，一次，有人问格特鲁德的信仰，她说她信穆罕默德，还抱怨说附近没有清真寺，并且打算去找一块祷告用的小地毯，把这场骗人把戏演下去。

20世纪70年代，圣凯瑟琳中学的同事们照了一张合影，20几个人的眼睛都盯着照相机。除了小“格蒂”之外，那时大家都如此称呼她。她身子偏左，避开照相机，照出来的是侧影，左边全看不见。格特鲁德从小就失去一只眼睛，因为哈罗德不当心用板球棍子打到她了。她一生都戴一只假玻璃眼珠。这件意外倒没有破坏他们兄妹间的感情，反而使他们更亲密。他们俩终身都相互爱护，来往很密，好似一对双胞胎。很长一段时间，他们在伦敦住同一所公寓。

1880年，哈代3岁那年。克兰利中学的校董会批准选出24位最年轻的学生，让他们住到学校对面的房子里，那座房子原本是用作病房的。这样，学校可以多点地方来多收些学

生增加收入。这个分校就由哈代夫妇再加一位管事来管理。如此的预备学校(早年恐怕以别的形式或名称存在)是单独管理的,与本校的财务完全分开。在1881年,哈代太太一共收进281英镑12先令。她要负责所有的开销。

预备学校的校舍是带双三角顶的房子,像座营房,坐落在蹄铁巷的山坡上,正对着学校。这里就作为学校的预备部而知名。至少从1881年起,哈代4岁的时候,他们的家就住在这附近的一座两层楼半独立式的小砖房里。房顶是红黑相间的扇形瓦,自17世纪起,这种屋顶在萨里便很流行。这个小房子还堂而皇之地叫做“乐山居”(Mt. Pleasant)。二楼有两间卧室,一楼是起居室和厨房,砖砌的壁炉很大。从起居室望出去,可以看到学校的钟楼和教堂的圆窗。

根据1881年的调查记录,这里除了哈代夫妇和两个孩子之外,还住了一位丹顿(Eliza Denton)女士,30多岁,她帮助哈代夫妇管理预备部。此外,还有一位22岁的梅纳德(Catherine Maynard),她可能是小孩的保姆。另外有两个佣人,一位是18岁的李(Alice Lee),另一位是38岁的寡妇钱德勒(Laura Chandler)。一共8个人挤在这栋小房子里。用当今的标准来看,这是太挤了一点。可是在隔壁,和哈代家同样的房子里却住了更大的一家。他们是种田的,妻子、岳父、两个成年干活的儿子,还有6个小孩,从11岁到4个月。

和其他住在蹄铁巷的邻居相比之下,哈代家还算好的。那些邻居多半是种田人,拖着五六个小孩,全都在克兰利或附近的小村如阿尔福德(Alford)、沃金(Woking)和多金(Dorking)住了一辈子。但是艾萨克的职位不可能让他们很奢华。学校的校长每年薪金大概1000镑,那时候,工人一年大概60~70镑,中等阶级以上大概300镑,副校长只有100镑,助理校长哈代的薪水一定更少。

哈代家的小孩，后来有人说，“受过标准的维多利亚时代的婴儿护理”。关键是标准这两个字。他6岁时，有一张穿标准维多利亚时代海军制服的照片，打一条短短的领带。他出生长大的那条街，几年前只是泥灰土路。从出生的老家沿着大街伸向四方的全是尖顶，半砖半木的商店，毫不显眼。如今，那与他家关系密切的学校，似乎在述说：这座红砖建筑，坐落在蹄铁巷的斜坡上，漂亮有余，但是缺乏其他年代较久的公立学校的历史和传统的分量。

克兰利中学的气氛和哈代此后经历过的完全不同，它不能培植出英国的精英。它太平凡，太不装腔作势，只有一股青春的新鲜气息。1875年，有一位参观者写道：“克兰利的学生可以四处跑来跑去，自由活动是这里的特色。”直到1888年，校队里还有老师参加。古老公学里的管理框架，严厉的限制，这里是看不见的。学生可以自由出入，可以抽烟斗，可以在体育馆附近闲逛。

照斯诺所写的，哈代的幼年时代很幸运，“开明、有教养，文化气息很浓……他知道什么是特权，也知道自己有特权”。在家里，注重的是教养和学习，这些，以前只有贵族子弟才能享有；在学校里，老师多半不是出身公立学校，每人都有自知之明，自己不是伊顿，不是哈罗，不是温切斯特的学生。如果说有“特权”的话，则是稀有的也是最理想的一种——经济背景一般，但文化背景很高。好似200多年前移民来的犹太人或当今的亚洲移民。后来哈代所以特别着重智力上的成就，同时也对他的社会地位和经济地位上的欠缺很敏感，可以说是由克兰利中学造成的。

1889年7月，剑桥大学圣约翰学院的校董沃德(J. T. Ward)向克兰利中学的校长报告一年一度高级班学生的升学

考试成绩。克兰利中学的学生是依“程度”升级的，主要是看考试成绩，不是根据年龄。有一年，全校的 347 位学生中有一位六年级的同学是 20 岁。哈代到六年级时才 12 岁，比同班其他同学至少小 5 岁之多。但是沃德先生说他的代数、几何和三角比其他的同学都考得好。那年，得第一名的学生年纪很大，哈代得第二名。“把第三名甩得很远，而且他还没有读过圆锥曲线及力学。照他的年龄来判断，我相信，”沃德写道，“他将来必然会出人头地。”

他真的是出人头地了。克兰利中学培养了他，但到 12 岁之后对他就没有再多的助益了。他的双亲对这位有天分的儿子抱很大的希望，四下里打听哪里可以申请到奖学金。当时，最难得，同时也是人人必争的奖学金是温切斯特的奖学金。温切斯特是人人心目中最负盛名的公学，也是测试你有没有数学天分的地方。获得温切斯特的奖学金非常不容易。在 19 世纪 60 年代，有一年，只有 7 个奖学金名额，可是有 137 个孩子去考。考试之前，有的孩子请特别的老师，有的进特别的学校。考取的话，就什么都有了。所以对学童们来说，这真是第一大奖。

哈代是 1890 年申请的，在 102 个考生中，他得第一。

到了 19 世纪 90 年代，克兰利中学也渐渐不像早年那么自由。哈代的父母又做了财务主任，专门管钱。他们也搬到一个叫做“康内尔”(Connel)的大房子去住。那时，哈代已经离开克兰利中学，开始闯天下了。

### 3. 固若金汤

温切斯特学校原本是为穷苦学生创立的。时间一久，和许多老牌的公立学校一样，也变成了贵族子弟的学校。从伦

敦的滑铁卢车站(Waterloo Station, 位于与之同名的教区内)出发, 坐车到温切斯特需要几个小时。温切斯特是个货真价实的地方。当人们想到公立学校时, 就会如同想到伊顿、哈罗和拉格比一样想到温切斯特。这些学校地位崇高, 是克兰利的创办者可望而不可即的。

多年来, 温切斯特毕业的学生中, 好些是历史学家所谓的“绅士似的叛逆者, 智慧的改革者”。20年后, 这个称号用在哈代身上倒很合适。温切斯特当然不是有意如此, 很多的毕业生是保守的, 是有教养的社会或政治领导人物。那些叛逆者也都大名鼎鼎。

在温切斯特, 哈代发现许多他要反抗的理由。在古老的校舍之外, 最先要对付的是校墙。它真是固若金汤, 石墙上开着一扇扇小窗, 这种牢不可破的建筑细节还是过去农民暴动以及牛津城战事所留下来的。14世纪学校创建初期, 这两件大事还记忆犹新。如哈代那样拿奖学金的学生, 是住在学校里所谓的智力聚集区。校舍好似中古时代的城堡, 灰色的石头建筑, 和克兰利的那种开放自由的气氛有天壤之别。

作为新生, 哈代先要接受“行话”训练——学会温切斯特学校里流行的特别切口和俚语。有些是从拉丁语转化而成, 有些是该校中古时代至今的历史留传下来的, 收集起来, 成为温切斯特校园里几百年来判断一个人是否够得上合格的“温切斯特人”的标准。例如, “脱格”(tugs)是消息过时的意思。欺负人叫“摆”(brock)。假日叫“补”(remedy), 说是从拉丁文remedium转来的。被班长或高班同学打罚叫“吞钉”(tunding)。学习这些切口并不简单, 一共有好几千, 印成一大本, 有标题还有插图, 每个都得记住。

班长负责监督每个同学都要学会, 而且要照着做。也可可以说是一种学生权力。马修·阿诺德(Matthew Arnold)的革新

运动本要削减公立学校中班长的这种霸权，可是改革之后，温切斯特的学生仍然在班长的手掌心中。他们仍然对低班或小个儿同学作威作福。如今已经比四分之一世纪前好多了，那时发生了一件“吞钉”惨案；一位同学不好好地学这些切口，被没头没脑地打了30棍，家长大怒之下，请了新闻界的人来评理。然而温切斯特仍然被认为是最野蛮的公学之一。打是常理，不打才是例外。每个班长在校方的默许之下照样施行“蝇王”(Lord of the Flies)\*式的虐待。整个学校在少年专制之下，像部落社会一样，全靠强权控制。

当时的校长是费伦(W.A.Fearn)，他特别注重传统，并且用传统的一套来管理校政。当哈代在学的时候，他开始实行“清晨山顶祷告”。每年两次，全校同学一起爬上圣凯瑟琳的山顶，点名及祷告。他又恢复了绕修道院游行一周，而且一面走一面唱圣歌 *Iam lucis orto sidere*，再穿过石头拱顶下的走廊。与克兰利甜蜜随和的风气相比，温切斯特简直就是个劳工营。哈代的数学老师的可亲的妻子萨拉·理查森(Sarah Richardson)，人们称她“狄克太太”，每个星期天都请同学到她家用点心，或看过期的《伦敦新闻画报》(Illustrated London News)，即使这样，也无法减去生活中的灰暗。费伦偶尔带同学去伦敦玩一次，奇怪的是甚至板球都无法使学生高兴起来。

哈代8岁的时候，也是开始执笔写作时，就办了一份报。有社论，有广告，有首相格莱斯顿(Gladstone)的演讲词——以及全篇的板球报道。

从克兰利成长起，直到读完温切斯特之后，哈代的世界一

\* 《蝇王》，英国作家戈尔丁所著小说，描写一群没有大人管的孩子做出的恐怖行为。——译者

直与板球的击球声共鸣，一直有白色的球衣在夏天烈日之下飘浮。英国的高层社会里，人人都谈板球，其重要性不亚于美国城市里孩子们的篮球，或纽约布鲁克林区的棒球。那时正是萨里郡板球队的黄金时代。小小的哈代常到伦敦的肯宁顿球场去看比赛，或是去看当时正红的名将理查森(Richardson)和埃尔(Alie)。在学校里，练习是决不缺席的，关禁闭都阻挡不了他。赛情在校刊里都有详细的报道。下面是哈代 11 岁时校队和村队一场比赛的报道：

这场球于 7 月 21 日在克兰利举行，非常缓慢。村队先守，防御投手鲁宾孙和布拉克。鲁宾孙投得很好，只有斯特里特稍有抵抗，第一局输 53 分。换边后校队防守，第一位投手就将全队封杀。以后全无好转，一共只得 45 分，只有一位球员得分为两位数。以后各局，村队越来越厉害……

打板球时，一个球员投球，另一位去打，场上的球员就跑来跑去，设法把球接着。听起来像棒球，尤其是也十分注重统计；不过板球没那么激烈，其精神也不相同。投球时手臂伸直，绕一圈抛出去。大多数是先碰地再跳到击球手面前。击球手拿着一根像桨的木板棍来“防守”他的“三柱门”。三柱门约两英尺(约 60 厘米)高，是插在地上的三根柱子，上面平放两根横木。如果投球手能把横木打下来，或者防守的人把它碰下来，这三柱门便算失守。击球手要在“被罚下场”前尽快地跑到对方的球门区而得分。

如此简短的介绍当然说不清楚这种球赛。它的根源，从哈代时期算起已经有 600 多年。而且以固定形式统治了英国人的夏天也有 200 多年。它有丰富的故事，有一定的礼仪，有自己的行话(例如“门很湿”是说击球手前面的地很湿，所以球的跳动很难估计)。板球爱好者卡达司(Neville Cardus)写道：

“板球需要个人的艺术和技巧，成败固然重要，但更重要的是投入多少的创意和品格。”从创意和品格两个词就可见英国人多么看重这项运动。

没有一个英国人比哈代更看重板球，对他来说，板球和数学是等量的。他看不厌《板球年鉴》里面的各项统计和比赛结果，以及有关板球的趣闻。1910年剑桥大学俱乐部的会议记录都引用过职业板球队常用的术语。他身为年轻的二一学院的研究助教时，常常在自己房间里用拐杖和网球模拟打板球。到60岁时，他还玩得很认真。他最喜欢击球手的背手球，他很注重战术上的变化以及如何调度击球手和球场上各个球员的位置……

但是在温切斯特的那段时间，板球却没有给他什么乐趣。其实，和克兰利一样，温切斯特也风行板球。有些人认为，板球所带来的体育至上的精神给学生的影响是惊人的。每到夏天更是板球的季节，1893年6月份的校刊就写道：“生命似乎是一场打不完的板球”，那是哈代主持校刊的第三年。

哈代固然是天生的运动员，可是在温切斯特他的板球技术并不灵。有人说他“个儿太小，又紧张，太瘦，肌肉太硬”，玩其他的球类还不错，尤其是足球。“他很能冲刺……路线跑得好……踢足球很棒”，这是当时的记录。至于板球，他从来没有进校队，所以离开温切斯特时觉得很遗憾。斯诺记得他一直抱怨，他认为自己的才能可以做教练，但是没有做到。他做击球手时错误百出——所以自以为本应有的精彩的板球生涯不过是一场黄粱梦。

这是哈代对温切斯特不满意的原因之一。他对板球如此的热衷，这一桩事就够他恨温切斯特一辈子。当然还有其他原因。因为教学方法不当，他从父亲那里遗传而得的艺术才能完全给糟蹋掉了。他很害羞，几乎到病态的程度，而他所处

的环境对这种脆弱个性是完全不体谅的。有一年冬天，他几乎病死。看到一位走读的同学那么开心，几乎嫉妒得要死。离开温切斯特之后，他完全不能吃羊肉，因为学校明文规定，一星期有 5 天吃羊肉。他从来没有再回过这所学校，也从不参加他们的校友会。

那时，温切斯特偏重古典文。一星期 26 节课，希腊文、拉丁文和历史各五节，三节法文，两节神学，两节科学，还有四节数学。哈代从来不在班上上数学，他单独跟副校长乔治·理查森(George Richardson, 人们叫他“狄克”)先生上课，在温切斯特这是一个特例。理查森读过剑桥，数学荣誉学位考试的成绩很高。他自己并不是公立学校出身，也不是好老师，因为他只肯在高才生身上花工夫。哈代当然算是高才生，他在 1893 年获得该校的邓肯数学奖(Duncan Prize)。

哈代不仅数学好，他还自修物理，读廷德尔(Tyndall)和赫胥黎(Huxley)的书，喜欢拉斯金(Ruskin)的散文，校长的历史课他也喜欢。所以六年读到一半时，他还不能决定以后要做什么。

后来哈代又对侦探故事爱不释手，有一个周末，在无聊的伦敦一口气看了几十篇。他虽然喜欢好的文学作品，有时也免不了乱看一通。他 15 岁时有一天，看到一本早几年出版的书，作者的笔名叫阿兰·圣奥宾(Alan St. Aubyn)，真名是弗兰西斯·马歇尔夫人(Mrs. Frances Marshall)，她有自知之明，认为用笔名比较合适。书名叫《三一学院的研究员》(The Fellow of Trinity)。讲的是剑桥三一学院的大学生活。这本书写得很差，人物莫名其妙，文笔粗糙，可是却打动了哈代的心弦，尤其是结尾的场面描述主人公弗劳尔斯(Flowers)在学术界成功时的得意之情。

赫伯特(Herbert)又回到三一学院。身穿学士学位的长袍，飘着缎带，他也不想把缎带塞到衣服里面去，袍子外面还有一顶皮兜帽。他神气活现地坐在小教堂里的学士席上，或者坐在大厅里研究人员的高桌旁。

他是三一学院的研究员了！

他坐到这高桌边上了，学院创始人及其他已故名人的画像带着默许的目光望着他。

考试时的激情、忧伤和挣扎都过去了，只留下胜利的喜悦。头顶上的那些过来人，为他们的庆功宴作见证，以三一学院丰富多彩的历史，来赞许他们这得来不易的成功。

他的成功让他忘了以往的不幸，让他更谦卑。让他受到老研究员们在这公用房间的蹄铁形大桌前热烈的欢迎。

直到这一晚他带着研究员资格走进大厅，坐在这里以前，在他默默无言，手足无措地吃着胡桃喝着酒之前——桌子上的胡桃和酒代表学术哲理的研究和文化——他还没有体味到这是多么大的成功。

哈代好似着了迷。“弗劳尔斯这家伙真不错（作者‘阿兰·圣·奥宾’也只能描述得这样）。”哈代心里想，“不过以我的拙见，他并不是什么聪明人。如果他做得到，为什么我就做不到？”他，哈代，也要做三一学院的研究员，数学是他的入场券。

哈代一心要上三一学院倒不是考虑到三一学院一向是剑桥大学王冠上的宝石，而是因为与剑桥或牛津的其他学院相比，它的数学成就最丰厚。对威克厄姆人(Wykehamist 这是温切斯特毕业生的称号)来说，他们最正统的选择是牛津的新立学院(New College)。温切斯特和新立学院均由温切斯特的主教威克厄姆的威廉(William of Wykeham)创办，他做过两任上议院议长。他的心目中，这两个学校是同一学校，包括了从中学到大学的各个年级。所以从温切斯特出来的威克厄姆人，

大多选择牛津，尤其是新立学院。哈代的那一年，46位威克厄姆人进了牛津大学的各个学院，其中15位进新立学院。只有8位进了剑桥大学的各个学院。

哈代是其中之一，而且还获得了奖学金。“恭祝史密斯和哈代两位的成功。”校刊《威克厄姆人》(The Wykehamist)登了这段并不大张旗鼓的新闻，“今年四项最好的奖学金，他们得到两个，实在是一殊荣。这是温切斯特空前的成就，其他学校是否能有如此的成就，实不敢妄言。”

在克兰利，哈代一家也很风光。艾萨克·哈代的学生在文科考试中成绩特优，使校长艾伦(G. C. Allen)牧师在一年一度的讲演日那天，高兴得几乎讲不出话来。他报告说考试官认为他们的成绩是全国第一。听啊！听啊！听众不停地欢呼、不停地鼓掌。校长接着说哈代的儿子得到三一学院的奖学金——这种成就，当地的报纸说：“这是温切斯特区所期望的最高荣誉之一”。

#### 4. 三一学院的研究员

剑桥和牛津两所大学对英国人的影响是难以尽书的。1904年埃利斯(Havelock Ellis)写的《英国天才研究报告》(Study of British Genius)说，他的研究以千余名英国名人为基础，其中一半进过大学，这一半人中74%出身于这两个学校。

剑桥，和在它西南方80英里(约128千米)之外的牛津一样，本是一个城市——由古罗马军队驻地演变而成的商人居留地。中等大小，位于剑河北边的小山上。13世纪起，学者们开始聚集形成了一些学院。后来有了学院同盟，就像美国开国前在《十三州邦联宪法》(Article of Confederation)下结成的联邦——每州有一定的自主权，而不像后来才由联邦宪法规

定确立强有力的中央政权的美国——您首先是一个学院的学生，然后才是该大学的学生。在 1720 年建立了评议会大楼，此前，大学中一直没有一个集中的聚会场所。

每一个学院有它自己的历史，有它自己的经济来源，有它自己的行政组织和各有特长的教学人员。每一个学院都有其独特的建筑风格，收的学生成分也不一样，连制服都不同。每一个学院都能列出它们的杰出毕业生的名单。最老的学院是 1282 年建成的彼得豪斯学院（Peterhouse College）。接着有国王学院，华兹华斯称它的有楼的教堂是“美术工艺伟大光荣的杰作”。在城北剑河的尽头是茂德林学院（Magdalene College，读作 maudlin），它是 1428 年由僧侣们兴建的，该院的塞缪尔佩皮斯（Samuel Pepys）图书馆里藏有佩皮斯的著名的《日记》。除此之外，还有圣约翰、耶稣（Jesus）、冈维尔和凯厄斯、彭布鲁克（Pembroke）等学院。哈代在学的时候，共有 20 个学院。有的学院学生和研究员加在一起只有一两百人；而有些学院，例如三一学院则近千人。

各学院的建筑俨然是一个有力的、一致的主题的变奏：面对大街，多半是一连串二层或三层的楼房。进了学院的大拱门后，是一段幽暗的过道，然后是传达室。那里有一位带着板球击球手小帽的传达员，听他讲话就知道他不是学生而是传达员，专管学院的例行事务——接见外客，送通知，管钥匙等等。过了传达室是一个内院，那里的草坪修剪得十分整齐，即使是在最阴暗的英国天气，看上去也是绿油油的。内院的四周是各种建筑：小教堂啦，图书馆啦或餐厅啦。这些房子大多是高屋顶的一层楼建筑，里面很多镶板，挂着该学院各位名人的加框画像。

学生要听大学的课，但多半是在导师的“辅导”之下学习。总是在学院内导师的房间里，一次两三个学生。除此之外，还

有管“品行”的导师和学科主任，监督学生各科的进度。这些都是学院里的教职员，不是由大学里来的。本科生全要住校，别无选择，都住在与校园隔开的一排房子里，每隔十几个房间就有楼梯相连。

这些“房间”不是美国那种“空房招租”不带家具的空房间，实际上有些是自成单元的公寓。设备和装潢都不错，漂亮的壁纸和地毯，有框的画，甚至宴会用的大餐桌。剑桥的男生被认为是不会煮饭，不会整理房间，不会料理自己的人。有人替他们铺床，还有“校工”，挑煤来烧壁炉、拿信、拿饭、换床单毛巾和桌布、泡茶等等。这些人称学生为“先生”，不能有一点不尊敬的言行。但是剑桥的福利不包括自来水，没有当时普通美国中产阶级所享有的各种方便。几间浴室集中在一起，从房间到浴室去要穿过冷风嗖嗖的院子。没有冷热自来水这么回事。校工每天早晨 7 点来房间后的第一件事，就是在脸盆里充满冷水供盥洗之用。

三一学院是剑桥最老的学院之一，也是最大的、最有名的学院。它是 14 世纪时由两个较小的学院合并而成，从亨利八世起就已经是目前的样式。每次哈代穿过大院，出大门路过一大排自行车时都要看到亨利八世身材粗壮的铜像。

大院的特色是那漂亮的有顶喷泉，这是 1602 年建的。大院是五个庭院中最大的一个，实际上也是欧洲最大的一个四合院。对角线长 400 多英尺（约 120 多米），足够做一个棒球场，四周的墙正好可以当作防止棒球飞出场外的篱笆。

分给哈代的房间在惠威尔庭院，出大院穿过卵石铺的三大街便是。这些房屋约 30 年前才盖好，比三一学院的其他建筑似乎稍紧凑些，也隔得远些。惠威尔庭院有安静的石块和草坪。哈代的房间由 M 号楼梯上二楼，从窗口可以看见小街及对街悉尼·萨塞克斯学院（Sidney Sussex College）的护墙。

但是站在院子里，则完全听不到经过桥街(Bridge Street)的自行车铃声和在耶稣巷(Jesus Lane)上走路的同学们的交谈声。

对来自温切斯特的哈代来说，三一学院当然主要不是赏心悦目的地方。温切斯特比三一学院古老，实际上比剑桥的任何地方都古老。小教堂一样的壮观，庭院一样的富有传统，修道院也一样的摄人魂魄。19岁的哈代，当他在三一学院的注册簿上签名时，他心目中认为三一学院所代表、所象征的才是最重要的。它所代表、所象征的是智慧的最高峰。

然而，哈代必将面临一个巨大的震撼，以至幻想破灭几乎使他放弃了数学——这就是剑桥传统的考试制度：数学荣誉学位考试，即 Tripos。

Tripos 读音是 try-pos，原本是指一张三脚凳。在古时候的剑桥，凳子上坐着一个人，他的工作是与那些数学学位候选人辩论，有时是巧辩，有时又大声疾呼。后来这个字便转义为数学学位候选人所参加的考试。再晚一些，这个字又扩展到其他领域类似的考试——例如古典文学 Tripos，自然科学 Tripos 等等。

数学 Tripos 是十分费时费心的。你要一连坐四天解题目，常常会做得很晚。休息一个星期之后，再来四天。上一半是测验速度，而有时只是算术测验，题目比较容易，有中等的学力就能通过。下一半，加倍计分，题目也难得多。这一半，甚至成绩很好的学生，很可能在数学上有建树的学生，都可能根本不知道从何下手。实在是骇人的考验，回想起来都令人胆寒。一位英国数学家多年后写道：“Tripos 是全世界最难的考试，如今还没有任何大学的考试能和它相提并论。”

而且 Tripos 已经不只是一场考试而已，它成了一种制度。当 1896 年哈代进剑桥时，这个制度其实已包含了围绕着它的

种种学术性的仪式,赋予它的高度评价,支持这一制度的其他种种体制,甚至与它的数学风格全都混成一体。最早的 Tripos 可以追溯到 1730 年,而且一直都是这么难。时光累积之下,它似乎要求越来越高,声望也越来越重要,这一神圣的传统荣耀同时也成了一种沉重的负担。

Tripos 成绩分三个等级,候选人要根据其考试成绩来排定等级。在评议会大楼宣读名次,仪式非常隆重。三级中的第一级,称之为优等生(那时用的名称是 Wrangler,早先,在 Tripos 考试中常常发生关于逻辑的争辩,Wrangler一词就是争辩的意思),优等生的第一名称之为 Senior Wrangler(下文简称优等第一)。为了要知道谁得到优等第一,人人都聚集到评议会大厅,甚至一向被排挤在剑桥生活圈外的女孩子们也想进来一睹风采。她们对这些优等生既有崇拜之情又有爱慕之心,这是不难想像的。正如 1751 年有人对一位副校长所说的:“也希望这些优等生能结识那些年轻的小姐……来祝贺他们的荣誉分享他们的欢乐。”

到了哈代的时代,欢乐和荣誉似乎更大了。优等第一,以及排在后面的各位优等生,都得到朋友或同学们的欢呼和鼓掌。毕业典礼那天,副校长坐在评议会大厅一端的讲台上,学院的辅导员宣读名单并将证书一张张递给他。接受证书的学生跪在他面前,校长拿起他的双手,用拉丁文再重复宣读一遍他们的学位。

二等生和三等生分别称为 Senior Optimes 和 Junior Optimes。当三等生的最后一一位——也就是三个等级的最后一名——去领取证书时,他的朋友们就从评议大厅最高一层坐席上,慢慢地、庄重地垂下一个木头做的大汤匙。实际上这是一把搅糖浆的大木铲,和人一样高,上面刻有希腊文和装饰用的花纹。当他站起身来时,就举起这个粗笨的东西,洋洋得意

地和他的朋友们大步走出大厅。

当然这个大木勺子是个安慰奖。优等第一所得到的荣誉却不是一件小事。它像光环一样，会终生罩在他身上。有人为美国的读者写道：“即使一个人得到了全美球队的队员称号，或成了罗兹(Rhodes)奖学金的得主，或当年最佳大学毕业生的第一名，这些都不足以和那优等第一相提并论。优等生的前十名，不但有一定程度的荣耀，也保证有出人头地的职业。半个世纪之后，为英国数学家写的讣告一定会提到死者是一位优等第一，或优等生里的第二名或第四名等等。有一部剑桥哲学会史准确地说道：“优等第一并不都是大数学家……[不过]如果他搞数学，一定会有相当的影响。”

在剑桥，在全英国，优等第一成了名人。人人都想和他搭点关系，好像他是肯塔基(Kentucky)大赛马冠军的马主一样——即使连赛马的基本常识都没有，他也成了明星。伦敦《泰晤士报》一定有夺魁的现场报道。印有他玉照的明信片也会在各处销售。20世纪初有一张照片：胜利者坐在户外的一把椅子上，皮鞋擦得亮光光，双手合抱——好一副跑马冠军的神气。

这一切都很正常，十足的英国味。Tripos 多多少少能反映出一个人的数学能耐，这是毋庸置疑的；要成为大数学家的话，多半是个优等生而不会是举大木勺子的那位老兄，这也是无人怀疑的。但是全靠考试成绩排定名次是否精确，则各人所见不同。实际上有许多例子说明，优等的第二名比第一名更有成就。著名的数学物理学家麦克斯韦(James Clerk Maxwell)就是优等第二名。发现电子的 J·J·汤姆孙(J. J. Thomson)也是。除此之外，还有热力学家开尔文勋爵(Lord Kelvin)，那时还叫威廉·汤姆森(William Thomson)，都是当年最好的数学家。每个人，包括他自己在内，都认为自己会得第一

名。“你到评议会大楼去跑一趟，看看谁是第二名”，他对仆人说。仆人回来后就说：“是你，先生。”另有别人 Tripos 考得比他好，但此人的姓名如今已被人遗忘。

问题在于，由此产生了所谓的“Tripos 数学”。这种数学与数学家所研究的严肃有用的数学毫无关系。Tripos 中暗藏机关，极富挑战性，是可以把优等生和木勺子老兄分开的。例如在 1881 年，在最高可能的 33 541 分中优等第一得到 16 368 分，而木勺子老兄只得到 247 分。不过这种 Tripos 数学问题又往往过时了，主要都来自欧几里得、牛顿和数学物理的习题——例如一个球体在圆柱上旋转，求其运动方程，或是一个涉及卡诺循环的热力学问题等等。这些问题要求的是能很快又很准确地处理数学公式，要的只是较为肤浅的聪明而不是真正的洞察力。

即使能顽强地坚持也无济于事，因为 Tripos 考题的证明不须太长太复杂，关键是要找到暗藏的机关。有一次考试，最好的学生——也是当年的优等第一——发现自己正在大伤脑筋的时候，另一位成绩较差的同学却做出来了。他马上悟到有暗藏的机关，就回头再看一遍，自己也找到了。所以汤姆孙大胆地提倡说，能够激发个人潜质的 Tripos 可以作为培训律师的最好手段。

为了 Tripos 的胜利，就产生了另一种教育制度。在 19 世纪，剑桥和牛津的大学讲师自成一个天地，与学生很少接触。讲解工作全由各学院的辅导教师负责，但是他们又做不到为学生准备 Tripos，因此有了第三势力来填补这个真空——私人导师。

私人导师并不教数学本身，他们收了可观的学费后，只是训练你如何应付 Tripos。有一位未来的优等第一写道，他们像驯马一样地训练你。四五个人一组，一个个题目地讲，每星

期三次。他们找出以前的考试题目，分门别类加上标记。他们本身很难有什么重要的数学成就。他们的“成果”就是出几个考上优等第一的人。有一位名叫劳恩(E.J.Routh)的导师，一连十几年培养出 20 多位优等第一。

学生的负担是太重了。一位著名数学家约翰·伊登索尔·李特尔伍德(John Edensor Littlewood)写道：“想要考上优等第一，三分之二的时间是练习如何很快地解出难题。”上课变成了奢侈的事。福赛思(A.R.Forsyth)讲到 19 世纪 70 年代末他的那些教授时写道：

他们没有教我们什么；我们也没有给他们机会。我们也不读他们的著作，因为已经肯定，我们也相信，那些东西对 Tripos 没有帮助。许多学生很可能看见教授都不认识。在一个以数学著名的大学里的数学学生会有这种怪事发生，主要的原因，即便不是惟一的原因，就是 Tripos 和它周遭的环境。这种环境，变得如此严重，好比英国宪章一样，轻描淡写的批评根本无济于事。

这是福赛思时代的情况，到了哈代时仍然是这样。Tripos 不可能鼓励任何人在新的数学领域里探索，不论这种探索如何能满足个人的心愿，只要无助于考试，一律不被鼓励。考得好，会带来事业上的成功——在好学校里得到一个好职位——但若只是在研究工作上有兴趣，或者勇于追求，则不一定能得到这种成功，正像南印度人娶到个漂亮的老婆，这是他生活的最高峰却不一定能美满生活的前奏。

哈代也被卷入了这个制度之内。第一学期，他被交到一位韦布(R.R.Webb)先生的手里，他是当时调教优等第一的一把手。在剑桥，每学年分 3 个学期，每学期 7 周或 8 周。一般说来，一连 10 个学期里，私人导师做他的工作，学生也做自己的工作。最后，直到寒冷的正月，学生坐进评议会大楼没有

暖气的房间里开始 Tripos 的煎熬。这就是哈代所能预见的前程。

有数学天分的人受这种考试的折磨，哈代并不是第一位。例如罗素，1893 年他是优等第七名，此后在数学和哲学上都有极大的贡献。后来他对如何做考试的准备这样写道：“数学好像是捉迷藏，摆弄巧妙的机关，玩填字游戏”考完之后，他发誓以后决不再看数学书。有一段时期，他把自己的数学书全都卖掉。

罗素到底还是把路走完了。许多其他的人也一样。哈代后来的同事李特尔伍德私下对哈代说，在他看来这考试空洞无用，可是他仍然咬紧牙关，“有意将他的数学教育推迟两年，一心一意准备对付 Tripos，拿到优等第一之后再来下工夫攻数学。他希望这样做不会太影响他的生涯”。哈代说他自己也“存了毫无希望的羡慕之情”，走的是同样的路。

但是此时年轻的哈代刚来剑桥不久，又心怀失望之情。认为自己无法走完这条愚蠢的路，所以还不如放弃数学算了。

“我不记得有没有想到过自己只能做数学家，”哈代后来写道，“我想我的才能在这方面是很明显的，也从来没有怀疑过长辈们所做的判断。”他谦虚地——也是错误地——否定自己的艺术才华。若是做哲学家，他又认为自己没有崭新的见地；做新闻工作或许有点希望？这些自我沉思，要 50 年后才见分晓。而在那时他权衡半天似乎别无选择，除了历史之外……

1064 年，戈德温(Godwin)的儿子哈罗德(Harold)在黑斯廷斯战役中箭阵亡的前两年，对诺曼底的威廉王子(Prince William)发誓不与他竞争王位，旋即被封为韦塞克斯伯爵(Earl of Wessex)，著名的巴约挂毯(Bayeux Tapestries)就绘有这段故

事。哈代小时候就崇拜这一杰作,认为它是极生动优美的历史再现,是艺术表现之典范,并亲笔题书“哈罗德伯爵加冕图”(Ye Crowninge of Ye Earl Harold)。后来,丘吉尔(Winston Churchill)在他的四大卷巨著《不列颠的诞生》(The Birth of Britain)的第一卷《英语民族史》(History of the English-speaking Peoples)中,也提到哈罗德的这一段故事。哈代对这些史实,十来岁时就已经读过,不过他太注意这段故事的细节,而对哈罗德伯爵的经历了解不多。

为了要进三一学院,他也写了一篇历史论文。考试官对这篇文章的印象极深,所以他很可能和拿到数学奖学金一样地拿到历史奖学金。当他回忆费伦校长先生那时把奖学金的事当作温切斯特中学暗淡无光的生活中最灿烂辉煌的大事时,他几乎想改换一个领域,而且很可能就转入历史学。在他无法决定时,他去见他的学科主任。这位学科主任却让一位洛夫先生(Augustus Edward Hough Love)给这正待塑造的心灵注入了相当的影响。

洛夫年方33岁,一脸兜腮胡子,尖圆的头顶禿得很厉害。几年前他被提名做皇家学会的会员,这是英国最高的科学团体。1893年他即将完成两卷本的名著《弹性的数学理论》(Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity)。弹性理论研究的是物体在冲撞下、在扭曲下、在重压下如何变形。他将那时所知道的全部知识作了一个总结。洛夫却没有将哈代引进这个园地。他虽然是应用数学家,但是对数学的基础、基本原理和抽象的表述也很有兴趣。有一次,他的朋友用几何方法向他解释某个问题,洛夫摇摇头,说他跟不上,“对我来说,我懂得的只有 $x, y, z$ ,我看不懂你的图”。他可能是考虑到哈代的兴趣和倾向,就向哈代介绍一本绝大多数应用数学图书馆都不知道的书,那是约当(Camille Jordan)写的《高等工业学校

分析教程》(Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique)。

30年后约当去世，在《皇家学会会刊》(Proceedings of the Royal Society)上写讣告的正是哈代，他借此机会评述了改变他终生的这本书：“将此书读完一遍而且读懂，这就已经是一大数学教育，尤其是对我这样的人，在经历‘Tripos 数学’的那种毫无助益的骚扰后，能看到这本书，能接触到真正的数学，对我的影响是无法尽言的。”

约当和欧洲大陆的数学家们，常常十分深入地探讨一些看上去很显然的概念。例如数学家们挂在嘴边的“连续函数”——即变数之间的关系没有奇特的或突然的剧变，他们也就是用这种模糊的、直觉性的方式来思考它们。但是，到底函数是什么？说它连续是什么意思？人们称这一类数学家为“分析数学家”，他们最喜欢的就是这类问题。

如果在纸上画一个圆，很明显的，这个圆会将这张纸分成两个区域——圆内和圆外两部分。假定纸上有两点，都在圆外，你一定能将这两点相连（当然，不一定用直线）而且不会穿过圆。没错吧？如果这两点，一个点在圆外，一个在圆内。那么连接这两个点时，就一定会穿过这个圆。

“肯定吗？”没有感染到欧洲大陆这种精密之风的英国数学家，认为这都是理所当然的，用不着再想。但是约当却把这显然的事实看作是一个定理，而且还一本正经地去找严格的证明。事实上，他没有找到，至少没完全找到。他的证明中有许多漏洞，而后来的继承者便一点点地修补。哈代 20 岁时，读到约当的书，却对这种严密得几近矫揉造作的推理感到很大的兴趣。“我永远难忘，”后来哈代谈到这本书（其大为改进的第二版恰好在 1896 年出版）时写道，“这本了不起的书的惊人之处，是它给予了我这一代数学家的许多灵感。当我读到它时，才第一次知道数学究竟是什么。”

这一切自然都和他即将参加的 Tripos 无关——此时哈代比以往更像数学家了。参加 Tripos 就是说他得跟私人导师去读。他的朋友李特尔伍德后来也幸灾乐祸地说就连“反叛成性的哈代”也投降了。这真是难看的苦药：要把“真”数学掷之不顾，只能搞自己不愿搞的 Tripos 数学。“每当我回想到那两年的苦读，”他回忆道，“一个神经没有失常的人，一个仍然胸怀大志的人，居然能花那么多功夫而什么都不去学，真是不可思议。”

哈代为成绩好的学生开风气之先河，他读完二年级就参加 Tripos 了，而一向都是读完三年才参加的，他这样做为的是早点摆脱这考试的束缚。他得到第四名。当他告诉他的朋友，未来的历史学家特里维廉(G. M. Trevelyan)时，后者写道：“了不起！这是个很大的胜利，不单是对你而言，这对发动读完二年级就可以考 Tripos 也是件好事。”哈代虽然是如此地瞧不起这个考试，可是后来私下对他的朋友斯诺说，他对没有考到优等第一一直引以为憾。“他天生好争先，”斯诺写道，“看看这件事就明白了：即使这是个没有意义的竞赛，他也要赢。”

然而，从此之后，哈代在他这一代的英国数学家中，声望越来越高。1898 年，他 21 岁时，他的第一篇数学论文就公之于众了。和拉马努金的文章一样，它以问题的形式出现，答案在三期之后发表。哈代在 1899 年毕业，第二年要考 Tripos 的第二部分。第一部分是私人导师训练这些考生，以确定等级。第二部分更有挑战性，更艰巨；哈代得到第一名，也马上成了三一学院的研究员。

## 5. “令人着魔的气氛”

1901 年 5 月 23 日，剑桥的莎士比亚学会(Shakespeare So-

society)召开第 250 周年大会,会上朗诵莎士比亚名剧《第十二夜》(Twelfth Night)的前三幕\*。哈代也在场——不是参加演出,而是如他朋友们所说的,是去“评判”。跟他一起去的有他的好朋友盖伊(R. K. Gaye),他是一位古典文学学者,扮演戏中的马伏里奥(Malvolio)。其他当晚共襄盛举的还有斯特雷奇,扮演玛利娅(Maria);吴尔夫扮瓦伦丁(Valentine)和船长两个角色;有吴尔夫未来的妻舅 J·T·斯蒂芬(J. T. Stephen),扮演培尔契爵士(Sir Toby Belch)。用镁光灯照相的是金斯(James Hopwood Jeans),他和哈代同年进三一学院,而且在应用数学上的成就和哈代在纯数学上的成就不相上下。真可惜,这些照片全都没能留下来。男演员的戏装都很华丽,女角色的戏装更不惜工本。盖伊穿了一双黄袜子,斯蒂芬穿了一件绣花的胸衣,吴尔夫戴了他那打滚球的旧帽子。这是一个疯狂的晚会。朗诵进行得不错,该会的秘书也如此记录:“有些基本规矩被忽略,例如面向观众,他们是应该知道的,只不过太保守而已!”

几个月前,1月 22 日,维多利亚女皇驾崩。以她为名的那个世纪,那拘谨的条例、那道德至上的狂热皆随她而去。爱德华统治带来的宽松则开始出现。

9月 3 日,哈代回到克兰利为父亲奔丧,他 4 天前去世,享年 59 岁。送葬的行列中,有哈代的妹妹和母亲。灵车上盖满了花圈和绿叶,从他工作过的预备学校出发到教堂,然后经过市镇大街到教堂的墓地,安葬在它的石塔下面。

回到三一学院之后,他住进大院的房间里。24 岁的哈代重又恢复他的旧生活。自从 1898 年考过 Tripos 之后,虽然和

\* 剧中角色姓名的译名均从人民文学出版社 1978 年版《莎士比亚全集》第四卷。——译者

从前一样的害羞敏感，但似乎比较爱社交活动。他如今的圈子，像他这样的教师子女本是打不进去的，那些人的价值观也不是他能想像的。他参加莎士比亚学会的聚会，也参加了两个剑桥的辩论社：一个是迪塞姆维里社(Decemviri)，另一个是饶舌与演说社(Magpie & Stump)。这些辩论社辩论的题目包括“开明的自私是最高的美德”或“拉丁族的退化已经到了不可挽回的最后阶段”。他还参加了另一个社团，这个社团既不公布开会日期，也不招募社员，甚至连它的存在也不宣布。

这个秘密的知识分子社团，叫使徒社(Apostles)。吴尔夫和斯特雷奇先后参加了该社。《第十二夜》里的另两个演员和哈代也是这个社的成员。

1820 年刚开始时叫交谈社(Conversazione Society)，是剑桥许多喜欢辩论，喜欢社交的学生组成的社团之一。发起社员一共十二位，所以就叫十二使徒社，再后来就简称使徒社。当哈代入社的时候，社员中有许多是剑桥历来最为知名的人士。其中有诗人丁尼生，哲学家怀特海(Alfred North Whitehead)，物理学家麦克斯韦以及伯特兰·罗素，以及其他一些今日不太为人所知的人。被吴尔夫称作“老布卢姆斯伯里”的 10 位核心人士，至少有 7 位是使徒社的成员。

当时一位社员说过，一位科学家若被选为社员，他一定是一位极好的科学家”。显然，哈代是够好的，他那聪颖的智慧，他那动人的潇洒，他那敏锐的审美观，英俊的相貌，良好的谈吐——全是人人喜爱的品质。实际上，不知什么缘故，起初他还拒绝参加。直到 1898 年 2 月 19 日，在一个人数众多的大晚会上，他才被请入社。

邀他入社的是穆尔(G.E.Moore)，也就是他的“教父”。吴尔夫后来写到穆尔时说，他追求真理“像猎犬一般地穷追不舍，像圣人一样地毫不苟且”；他是一位才华横溢的哲学家，

1894 年加入使徒社。任何思想上、感觉上或言语上的有失精确他都无法忍受；他一直不停地问，你到底是说什么。1903 年他写的《伦理学基本原理》(Principia Ethica) 阐述了他的哲学，加上吴尔夫所评价的“对真理、对简洁透彻的论断以及对判断力的特殊情感”使他对剑桥那一代的知识分子产生了决定性的影响，最后影响整个的布卢姆斯伯里派。

每星期六晚上，使徒社聚会一次。例行的仪式是吃“鲸鱼”，其实是烤面包上放沙丁鱼或鳀鱼，然后由一位社员宣读一篇专题论文。题目诸如“任何事件是否皆为必然？”或“道德哲学能不能为不快乐提供解脱？”或“年轻人能接受年老吗？”宣读完毕之后，大家辩论一番再投票表决（上述最后一个问题是哈代投的是反对票）。自吹自擂或矫揉造作是大家所痛恨的，从他们用的行话可以看得出来。申请入社的人称之为“胚胎”，入社典礼称之为“出生”。社外的世界——即所有使徒社以外的事物——称之为“现象”，而社内的一切称之为“现实”。

“这里自无禁忌，毫无限制，绝无令人惊讶的事；思辨有绝对的自由，全无阻碍。”罗素写道（他比哈代早六年入社），“我们讨论世间万事，不够成熟是难免的，可是那种海阔天空，颐指气使的气派是成年之后所不会有。”每次会议要开到夜里一点，然后还要在内维尔庭院的小修道院前面走来走去，作会后非正式的讨论。在那个时期，这些讨论的参加者多半是一学院或国王学院的学生。1885 年入社的迪金森 (Goldsworthy Lowes Dickinson) 写道：“这些事的精髓，我所能感受到的，非言语所能描述。年轻人的心灵成长时，当思辨是一种激情，而爱使讨论变得更加深刻。这里所发生的事情[几乎无法置信]，除了那些……那些沉醉在这种令人着魔的气氛里的人以外。”

迪金森是出身国王学院的古典文学学者，粗犷得令人难以抗拒。有很短一个时期想进医学界，后来成了和平运动的激进分子。他是同性恋者。使徒社的社员并不都是同性恋，或许一大部分都不是。不过，那时同性恋是一种风气。哈代入社之后几年，此风更盛。1901年，后来写《印度之旅》(A Passage to India)的E·M·福斯特(E. M. Forster)入社，他也是同性恋者。1902年斯特雷奇入社，1903年经济学家凯恩斯(John Maynard Keynes)入社。(这位经济学家曾经对哈代说，如果他对股票市场和哈代对板球一样热衷的话，他如今必已成为巨富了。)他们俩都是同性恋者，一位为该社写编年史的人说，他们的入社“把社员之间那种傲慢的讲话态度和惠特曼式的(Walt Whitmanesque)\*同志之情转变成表露无遗的、要命的、也是咄咄逼人的一—同性恋。他们把同性恋提升到一种艺术形式或美学教条的高度：使徒社员称之为‘高层次的男色’——他们认为男与男之间的爱可以比男女之间的爱更高一层也更微妙，所以他们把同性恋的关系提高到精神境界之上。

在哈代入社的时候，使徒社还没有恶化到后来格兰特(Duncan Grant)所写的程度：“连那些平时拈花惹草的家伙也假装好男色，以此换取别人的景仰。”斯特雷奇和凯恩斯加入之前不久，哈代就正式退出；可是好多年以来，他仍然和“兄弟们”维持很好的关系。

哈代有同性恋的倾向大概是无疑的。在他的生活中，除了母亲和妹妹之外，没有另外的女人扮演过重要的角色，但是却有许多他热烈爱慕的男性朋友。

\* 惠特曼(1819~1892)，美国著名诗人，他认为社会需要精神上的提高，主张培养刚强的友谊和同志情感。——译者

例如,1903年他和盖伊在一学院共住一套有两个房间的套房。盖伊也是学院的研究员,两年前也参加了《第十二夜》演出晚会,是和哈代同年进一学院的。有迹象显示,他会成为一位卓越的古典文学家,正如哈代会成为一位卓越的数学家一样。年方25岁,已经得到一连串的奖章和奖金,包括他以后写的《柏拉图的不朽观及其与理念论的关系》(Platonic Conception of Immortality and Its Connexion with the Theory of Ideas)一文所得到的黑尔奖(Hare Prize)。很久之后他自杀身亡。但现在,吴尔夫写道:“他和哈代似乎不能分离,从来没有看见他们分开过,或是同别人交谈。”吴尔夫也记下他俩如何在壁炉前度过安静的一晚,垂头丧气地抱着刚看过兽医回来的瘦猫。

一位很久以后认识了哈代的青年数学家说,20世纪20年代哈代在牛津时就流传过“某某年轻人……”的谣言。后来在30年间哈代来美国访问时,他对同性恋者图灵(Alan Turing)\*的印象,用为他写传记的霍奇斯(Andrew Hodges)的话说是“又一位英国的同性恋知识分子和无神论者”。同一时期,他把一本书题献给一位来自牛津而且比他年轻很多的人,有人说书上称此人是“他所钟爱的洛玛斯(John Lomas)”。

这些都是后来的事。如果哈代早在一学院读书时或成为研究员时已经是同性恋的话,那他是非常谨慎的。几位了解他,也不在意他有同性恋倾向的人都说,他从来没有在谈吐上或服装上显露出此种倾向。李特尔伍德和他一起工作40年之久,说他是“无实绩的同性恋者”。除此之外,再没有涉及同性恋行为的记录,也没有那种某某爱某某的风言风语。近年来好些剑桥出身的名人都有这种谣言缠身。惟一与性有关

\* 图灵(1912~1954),英国数学家,现代计算机的鼻祖之一。——译者

的消息是 1899 年某星期六的聚会,使徒社的社员们辩论手淫(他们称之为“自虐”)是否目的正面手段差。哈代说是。

哈代是公立学校的产品,那种寺院似的环境正是培养男孩子们成为同性恋者的温床。这是人人都知道,人人都接受,也没有人认为是严重的事。青少年时期的恣情放肆,到了成年之后大都消失了。1897 年,也就是哈代离开温切斯特的那一年,埃利斯和西蒙兹(John Addington Symonds)合写的有关同性恋的早期研究《性欲倒错》(Sexual Inversion)一书就提到“在校男生的热情和亲密”都会随时光消逝。

即使哈代在这段时期有过同性恋的经历,他也不会宣扬此种私事。1896 年和 1908 年所出版的几本书,例如卡彭特(Edward Carpenter)在 1896 出版的《同性的爱》(Homogenic Love)和 1908 年出版的《中间的性》(The Intermediate Sex)都说同性恋是本能的,不是道德行为可以控制的。但这与海涛般的反对声浪相比不过是一点泡沫。1895 年哈代才十几岁时,发生了王尔德(Oscar Wilde)受审的事。这位英国大剧作家,因同性恋行为而被判两年苦工,以致他的妻子和两个儿子都改了姓;他的剧本也不准上演。这在当时算是正常的。卡彭特和埃利斯都说同性恋是很自然的现象,但在当时文化背景下只是很微弱的呼声。“上世纪的最后五年,有关爱和欲以及婚姻的讨论都不太公开,”当时写编年史的海因斯(Samuel Hynes)在《爱德华时代的观念转变》(The Edwardian Turn of Mind)一书中写道:“仿佛维多利亚时代在它的最后几年里要全力保持它的特色的。”

20 世纪初期,哈代已经成年,带有爱德华时代的自由气质。可是他的气质成型更早,还在维多利亚时代,那时公众道德观念十分强烈。正如希梅尔法布(Gertrude Himmelfarb)在《论维多利亚时代的仪表和道德观》(Manners and Morals Among

the Victorians)一书中所强调的,那时一切讲外表,做了狡诈的事最好不作声。所有的人都这样过日子,这不算“虚伪”,而是合乎常规。然而,在“本性”驱动下做的事极少有地位。如果有那种念头的话,包起来也好,换个方式也好,总之要加以控制。看在老天爷的份上,你决不能做这些事,也不应该做。

20世纪初,哈代所在的剑桥是老维多利亚时代和新爱德华自由时代的混合物。使徒社及整个剑桥,同性恋的暗流即使有上涌的趋势,却一直未能突破。甚至前卫派的最前卫者,仍然回响着维多利亚时代的呼号。正如希梅尔法布谈到由使徒社成员促成的布卢姆斯伯里运动时所说的:

这些人以自己的诚实和坦白自豪,特别是在私人“感情”上的诚实和坦白——并且,认为这正是与维多利亚时代的虚伪或口是心非背道而驰——然而对这种感情的真相,却能如此长久地藏而不露,这实在是一个讽刺。连明察秋毫,并有心理分析能力的特里林(Lionel Trilling)研究福斯特的长篇巨著时都没有提到他是同性恋者。1951年为凯恩斯写传的罗伊·哈罗德(Roy Harrod)——30多年来,他写的这本传记是公认的定本——谈到凯恩斯的同性恋时也故意地特别掩饰。哈罗德是凯恩斯的朋友,很了解他在这方面的癖性。还有吴尔夫的自传,一共五卷,讲到他妻子的精神崩溃时,写得十分详尽,可是对他身边几个朋友同性恋的事只字未提。

从时间和地点来判断,哈代的多年老友李特尔伍德说哈代是“无实绩的同性恋”恐怕也语焉不详。李特尔伍德自己曾和一位有夫之妇生了一个孩子,而且直到1977年他即将去世前都不公开承认(在一学院时,他曾在教员休息室不经意地提过,却因发现大家不当一回事而大吃一惊)。所以,同性恋比这些都更受顾忌。哈代即使有过同性恋之实,李特尔伍德大概也会为他否认。

再说，李特尔伍德恐怕也是什么都不知道。哈代将自己私生活的不同层面仔细地掩盖起来。使徒社的社友他都认识，聚会他都参加。他的名字在斯特雷奇、福斯特、吴尔夫、罗素以及其他人士的日记、备忘录和自传中都被提到过，可是讲得并不多。给人的感觉是他并非中心人物而是配角。身为数学家，而且是纯数学家可能把他与别人稍微隔开一点。例如在莎士比亚学会里，大家常如此取笑说“他的高等数学”可以用来计算每个人聚餐该出的份子是五先令一便士这样一个“难算的数字”。他是前卫世界中的一个分子，他个人的倜傥潇洒使大家尊敬他，接受他，也欣赏他。可是人们知道，他生活的重心在别处。

在数学上？当然。

在地下的同性恋集团中？或许有可能。

哈代终身只和男人往来，从来不和妇女交往，在那时，这并不是一件特别的事。在埃利斯的那本书里，千余位英国名人有 26% 没有结婚。哈代所属的学术界和文化界里，寺院似的生活是当时生活方式的另一极端。

故而在克兰利中学，除了预备学校之外，所有的老师都是男的，而且一大部分是单身。舍监则非单身不可。温切斯特是这样，剑桥也一样。莱斯利·斯蒂芬 (Leslie Stephen) 在他回忆 19 世纪 60 年代初期在剑桥的日子所写的《早年印象》(Some Early Impressions) 中说：“我们的时代是一个单身汉的社会，……我一生中，从不记得在剑桥和任何单身妇女交谈过，除非她是管房间的女佣人或是房东太太。”

那一代人之后，在哈代进了剑桥时，情况毫无改变。在 20 年前 20 几个学院中只有两个——格顿 (Girton) 和纽纳姆 (Newnham)——是为女学生办的。女学生要有伴，要得到老师的同意才可以上课。直到 1913 年，她们只能彼此为伴不可

以参加其他同学的活动。到 1882 年为止，学院的研究员是不可以结婚的，其实很久之后，许多研究员仍然是单身。1887 年，曾有人提议颁发学位给女生，可是提议没有通过。10 年之后，即 1897 年 5 月的一天，一群在乡村演戏的演员还为此事聚集在参议大楼前面抗议。他们吊起一个女人的画像，同时在一个布条上写道：“您到格顿去吧，您到纽纳姆去吧；这儿不是你们姑娘家住的地方。”这句话是从莎士比亚的名剧《无事生非》(Much Ado About Nothing) 第二幕第一场的台词套出来的：“您到天上去吧，贝特丽丝，您到天上去吧；这儿不是你们姑娘家住的地方。”

这种不自然的几乎是可笑的环境，使学院中的那些老资格们对家庭生活毫无所知。在圣约翰学院就流传过一个故事，说有一位年纪大的单身汉在高桌子（餐厅里留给资深人士用的餐桌）上恭喜某人添丁。他问道：“小男子汉多大了？”

“六个礼拜。”回答说。

“啊，”老单身汉导师说，“刚刚学造句了，我想。”

哈代和其他研究员惟一能接触的女人就是来为他们整理房间的女佣。据说，选这些女佣时要相貌平凡，年纪大，并且是婚姻没有问题的。如此才不会让学生们以及院里的员工太分心。

在这种只看得见男人的天下，公共道德观又如此之强，更没有当今那么多关于性的公开喧嚣，所以热情及专注的友情都不能以肢体语言来表达。纽瑟姆(David Newsome)在写到维多利亚时期的剑桥时指出：

在仅有男人的社会里发生了浪漫的友谊，在那段时期里是正常的也是受尊重的……要十分当心避免狡诈或轻视的批评……在 19 世纪，男性或女性与别的年龄相同或不同的同性发生感情强烈的关系是正常的……没有人认为

是不健康的，也不妨碍与异性发生此种关系直到结成圆满的婚姻。

19世纪90年代后期，一位医师向埃利斯和西蒙兹提供了好几个热情如火但没有肉体关系的例子：

这些例子里，生理上的性冲动比一般人低，可是情感上的冲动则很强。开始成长为一种友谊，除了用柏拉图式的对话之外，我找不到适当的词句来描述这种友谊。当你渐渐地发现他们的气质与常人大不相同时，除了引起人们一种异样的感觉之外，并没有羞耻的自责。恰好相反，意识到情感的内涵比存在于异性之间的更精致更富精神性，反而有升华的感觉……生理上性的吸引力仍然被认做这些关系的基础，可是作为一种情感，部分地作为一种理论，禁欲论被采纳了。

斯诺比任何人更了解哈代，就是以这种友谊关系来描述他的情况。这种情况离今日美国的生活是何等遥远。他写道，哈代一般说来即使对称为好友的人也难得有溢于言表的亲密交往。

他一生前后曾有两三次不同的友谊关系。情深、专注、与生理无关却仍有刺激性。我所知道的一桩是一位年轻人，他的气质和哈代一样细腻。其他的例子，我想也都大同小异，我只是随便挑选而已。对我们这一代人来说，这种友谊似乎是不圆满的也是不可能的，对他们却非如此。如果不接受这个事实，则对哈代这种人的气质以及对剑桥当时的社会，都无法理解。

虽然有证据显示，但是我们仍然不能断言哈代是同性恋者。其实这并不要紧。他可能过着完全无性的生活，不知性为何物，偶尔有的冲动也被维多利亚时代的美德所压制。再不然，他有一段极为秘密的性生活，掩盖得如此周密，甚至他的朋友都不知道，抑或知道的也都不提。不论是哪一种情况，他的防御工事都做得很完善才能长年如是。当然，当时的社

会有助于此，不过最后总要付出代价。

这是难免的。可以从眼色中看见他那迷茫困惑的神情。后来与他相识的牛津经济学家罗宾斯(Lionel Charles Robbins)回忆道：“我怀疑，哈代发现，人生交往有很多关系是令人痛苦的，所以很早他就开始防范。即使在友情深厚的时刻，你也会感觉到他有所保留——尽管他能够十分友善。”他始终和外界保持一段距离。他对板球的热爱，聪明的谈吐，有分寸的怪癖，全心全意献身数学——这些都是他的表象，都不会造成与他人真正的接近。在剑桥，有许多人以他为朋友，却几乎没有一个以他为密友。

1913年之后，哈代和一位贫苦的印度小公务员做了朋友。他们之间的友谊也没有发展到亲密的程度。

## 6. 哈代学派

1900年，哈代成为三一学院的研究员。1901年他得到史密斯(Smith)两大奖金之一。史密斯是三一学院以前的院长，从1769年起就是剑桥数学家中的顶尖人物。

1903年，哈代得到硕士学位。在英国的大学里，通常这是最高的学位。(剑桥在第一次世界大战前没有博士学位，那是德国的发明。后来设立博士学位是想把本来要去德国的美国人拉过来。)

1906年，他做了三一学院的讲师，每星期上6小时课。通常开两门课，初等分析和函数论。这段时间里他有时也讲一些非正式的课，但是没有做过导师。他是做研究工作的。

哈代后来常说他成功慢。这种说法也有道理，因为他数学上的许多重要贡献都是到以后才出现。20世纪的头10年，他每年发表10到12篇论文，大部分都是关于积分或级数

的。诸如《发散级数和发散积分理论的研究》1904 年发表于《数学季刊》(Quarterly Journal of Mathematics);《某类整泰勒级数之零点》1905 年发表于《伦敦数学会会刊》。他的许多工作是把约当书中所提的思想加以精炼或扩充,这本书在他做学生的时候给了他很大的启发。

多年之后,哈代也曾检讨过这段时期里他所做的工作。“这 10 年里,我写了不少东西,但很少是重要的。”对于碰到李特尔伍德和拉马努金之前这段时期的工作,他说:“我能记得的,也觉得有重要性的不过四五篇。”到 1907 年,文章的总数已达相当的分量,所以当年的 10 月 31 日,他被提名申请为皇家学会会员。

剑桥的数学圈子里许多知名人士都支持他。例如当年介绍他认识约当的洛夫就支持他。另外还有霍布森,即几年后拉马努金给他写信的那位,也支持哈代。他的支持者还有布罗米奇,就是希尔曾建议拉马努金要先读一遍的那本有关无穷级数的书的作者。哈代和许多人一样,希望在自己的名字之后加上 F.R.S. 三个字母(Fellow of the Royal Society,即皇家学会会员)。第一次没有通过。到 1910 年才被选入会,那时他 33 岁。伦敦的一家照相馆拍摄了他入会时的照片,并将眼睛和嘴附近略加修饰。这大概是摄影师的机械反应,因为哈代看上去太孩子气了。

多年以后,哈代坚持说他一生所做的工作没有一件是“有用的”,但实际上并非如此。19 世纪,奥地利的修道士孟德尔(Gregor Mendel)将高秆的青豌豆和矮秆的青豌豆杂交做实验,发现每一代的后裔中高秆和矮秆数之比是固定的,而且可以预测,由此奠定了遗传学的基础。他的实验当时没有人注意,也就被搁在一旁。他死后 16 年,即 1900 年,他的工作再度发表时引起许多人对其真知灼见发生兴趣。此后几年,这成了

很活跃的争论主题。

问题之一是下一代的隐性性状或显性性状的争论。隐性性状是“消极的”，只有双亲都具备这种性状时它才会在下一代表现出来。显性性状则是只要双亲之一具有这种基因就会遗传到下一代。《皇家医学会会刊》(Proceedings of the Royal Society of Medicine)上有一篇文章说，照孟德尔的遗传因子学说，显性性状，例如手指发育不全，即所谓的短指畸形，应该十分普遍，但这与实情不符。该文的作者肯定是误解了孟德尔的学说。

对此，1908年哈代给美国的学术刊物《科学》(Science)写了一封短信说明显性性状不会过分繁殖。如果将每种基因型出现的概率用不同的符号代表，只要简单的代数就可以说明每一种基因在每一代出现的比例都是固定的。换言之，如果交配是随机发生的——即不依照达尔文的自然选择而产生某种变体——显性性状不会独占而隐性性状也不会消失。德国医生魏因贝格(Wilhelm Weinberg)同年也发表了类似的结果。这个原理后来就称为“哈代—魏因贝格定律”。它对群体遗传学有很大的影响，并且也在血型的遗传转移与其他罕见疾病的研究上有用。如今每本科学词典或遗传学的教科书上都有这个定律。

哈代当然不把它当一回事。因为在哈代看来这对于数学毫无意义，哈代甚至认为它糟透了。然而它并不是完全无用的数学：

埃利斯有一次写道：“我生来就是英国的业余爱好者，并且一直如此，这是天性使然。无论我追求什么，总是一股热情在推动。”英国人大都像埃利斯一样，很鄙视因需而为的人。业余爱好者做什么事，不是为需要，而是为爱好，为真，为美。哈代的使徒社“教父”穆尔就有这种天性，这也反映在他的哲

学里。照希梅尔法布的说法，穆尔写的《伦理学原理》代表的就是“解放宣言”，强调爱、真和美。“甚至提到爱、真和美时也仔细界定，以免遭遵守道德观之需的玷污。无用的知识比有实用价值的常识可贵，外在美不如内在美，马上受益不如等待后效。”

哈代的数学，就是穆尔所信奉的宣言在数学里的实践。

好多年后他这样说：“我从来没有做过‘有用’的工作，我的发现，没有一样对人类的生活，直接或间接，好或坏，有过或将有丝毫的影响。”他把穆尔的感性用在数学上，说不定他自己并不自觉，所以也没有明说。后来有人把这种信条称之为“哈代主义”，表示对实用主义的对抗，而哈代 50 年之后写的《一个数学家的自白》(A Mathematician's Apology)一书中，可以说每页都有这样的话。

数学可以用于桥梁的设计，或者增进大众的福利，但他认为，这些情况并不能为数学辩护。对这种数学他只有轻视。他写道：

不容否认的是，初等数学的一大部分……有相当的用处。[但是]数学的这一部分，整个说来，是最无味的，它是最没有美感的部分。“真”数学家的“真”数学，例如费马的，欧拉的，高斯(Gauss)的，阿贝尔(Abel)的和黎曼(Riemann)的数学几乎全是“无用”的。

接着哈代又怜悯数学物理学家，因为他们要用数学来了解宇宙。这样过日子岂不是太可怜？

因为要使自己有用就必须做单调乏味的工作，他不能充分发挥自己的想像力，尽管他希望升上高处也不能。“想像”的宇宙比这个呆板地造出来的“真”宇宙要美丽得多。由于这个残酷的但是真实的原因，即它们与实际不符，所以应用数学家所能想得出的最美好的成果也应该马上丢掉。

“真”的数学就不是这样了，哈代继续说：“如果能作证明的话，数学必定被证明是一种艺术。”从这个角度来看哈代—魏因贝格定律，就会发现它是很有用，但是毫无美感。这就违反了他的原则。

1913年初哈代刚刚知道拉马努金的时候，上述的美学原理还没有全部定型，也没有透彻地讨论清楚，只不过刚刚开始形成，并且开始传播。在英国数学界，这样围绕着哈代形成了一个学派。这个学派对乏味的只讲实用的遗传学是毫无兴趣的。实际上对英国多年来引以为豪的数学物理学也没有兴趣。这个学派崇尚的是欧洲大陆数学家中如约当等人的纯粹数学。

英国是一个岛国，与欧洲大陆隔离，英国人是岛国民族，对外来的事物既怀疑又难以接受。在19世纪末20世纪初，这种心态更为强烈，它为大英帝国的强大而自豪，既富有又欢乐。海因斯在《爱德华时代的观念转变》一书中，对当代英国人的心态的描述是：“好似风和日丽的下午在花园里聚会——尤其是对身居花园之内的人而言。……但是花园之外许多重要的事情在发生：20世纪的世界是在花园外面造成的。”——还可以加上一句：数学，还有其他东西，也是如此。

自17世纪起，英国的数学就背向着欧洲，而且从来不屑回眸一望。那时牛顿和莱布尼兹两人，可以说是完全独立地发现了微积分。这个发现应该归功于谁，他俩在世时就争论不休，两人去世后更是吵得天翻地覆。英国或欧洲大陆的数学家当然为自己的国人争辩。那时，可能除了莎士比亚以外，牛顿是英国土地上产生的最大的天才。可是后来竟被称作是“整个英国数学界，而不只是剑桥数学界的最大灾难”。因为要为他的智慧的光荣辩护，好几代的英国数学家都抵制欧

洲——他们一直使用牛顿那些麻烦的符号，不注意海外的新发展和新成就。一位编年史家称之为“大赌气”。

上述的争辩影响到 18 世纪、19 世纪、直到 20 世纪的微积分乃至整个数学。欧洲大陆的数学家注重的是“严格性”，就是哈代从约当的《分析教程》中感受到的那种严格性。这种严格性坚持要把直觉上“显而易见”却常常布下陷阱的数学概念弄清楚。英国人，可能是天性使然，再加上对日耳曼民族这种吹毛求疵，事事理论化颇不以为然，所以对这种严格性不屑一顾。1893 年，数学荣誉学位考试优等第七名的罗素回顾剑桥时代时说：“那些教我微积分的人并不知道其基本定理的有效证明，而要求我们凭信心接受那些有地位的诡辩家们的说教，我也知道，微积分在实用上屡试不爽，但却不知道为什么。”这段话当然可以用在其他学生身上。

微积分的基本策略是将一个量分成一个比一个小的量，渐渐接近零但永远不是零。这个过程称之为取“极限”，这是了解微积分的根本，但是对刚学过代数或三角的学生来说，这是从他们所熟知的站得稳的地方来到滑溜的站不稳的新地方。但是这段航程仍然可以轻易走过：只要把注意力集中在应用微积分解决实际问题而不要回顾就行了。

甚至今天的教科书里，也处处可见此种分歧——即 19 世纪英国和欧洲大陆相互平行的两条路：作者先简略地介绍极限，并假定大家有直觉的但模糊的了解。接下来花上五六章篇幅，来讲积分的技术，极大、极小问题，以及其他初等微积分的问题，这是美国式微积分课程的支柱。然后到第七章前后，又回头讨论这个抓不住的概念。这一次跟前面不同，要走遍以前绕过的满布地雷的地方，直接讨论这个概念中的难点——把学生的脑袋硬拉出他熟悉的东西之外。

在这种一般的微积分教科书中，前六章可以说是英国数

学,完全没有欧洲大陆的影响。第七章就来自法国、德国和瑞士的数学家给出的严格性。这种精雕细刻的处理方法的通用名称为“分析”。这里是希腊字母的世界,用 $\epsilon$ 、 $\delta$ 来表述无穷小量,但数学家们知道如何处理。在这里,数学、逻辑和犹太法典混而为一。

最先超越以往这种松懈、直觉的江湖秘笈的是高斯、阿贝尔和柯西(Augustin Louis Cauchy);接着魏尔斯特拉斯(Weierstrass)和戴德金(Dedekind)再向前推进。他们都不是英国人。所以英国人就视而不见。20世纪前,剑桥人故意将柯西称为“苛鸡”,就是那个最先在法国开创分析学派的柯西,也是发表柯西积分定理的柯西。

自牛顿以后,英国的数学一直偏应用方向。数学物理学是英国的特长,统治这个部门的有开尔文、麦克斯韦、瑞利(Rayleigh)和汤姆孙(电子的发现者)等人。纯粹数学则毫无光彩,在整个19世纪里几乎没有一个知名人士。“辩证的严格化,”李特尔伍德回忆道,“被一般人——很少例外——轻视,甚至说蔑视也一点都不夸张,认为那是挑剔细节而不务正业。”牛顿什么都说过了,为什么还要将这些细节翻来覆去地讲个不停?微积分,以及以它为基础而衍生的数学物理学不是使用得很顺利吗?

所以英国就在这死寂的 Tripos 制度下酣睡不醒。在这个制度下,牛顿是上帝,他的《自然哲学的数学原理》(Mathematical Principles of the Philosophy of Nature,简称 Principia Mathematica)是圣经。一位数学家后来写道:“我在 1881 年参加 Tripos 时,每一个引理,即用来证明另一个定理的定理,都要连它的编号一起记住,好像这些引理是《圣经》的一条戒律或《诗篇》第 100 首一样……剑桥变成了一个自满、自足、自鸣得意的学校,在它自己的局限之下不能自拔。”有一位欧洲大陆的数学

家被问及是否知道英国数学近况时回答说：“英国数学家在做什么我们是从来不看的。”

最先带来改革之风的是福赛思，他在 1893 年出版的《函数论》(Theory of Functions)一书介绍了来自巴黎、格丁根和柏林的新思潮——其实那时已经不算新了。此书的笔调很具权威性，正如内维尔说的“给剑桥带来极大的启示”。甚至有人认为继牛顿的《原理》之后，它对英国的数学具有最大的影响。然而，用欧洲大陆的标准来衡量，此书写得很糟，评价多半都不高。“福赛思对  $\delta$  和  $\epsilon$  掌握得不太好”，李特尔伍德批评说。 $\delta$  和  $\epsilon$  是两个希腊字母，常用来解说无穷小量。不过，他使英国的数学家转过眼来看欧洲大陆，他开辟了一条新路，可是他自己却没有走。

这件事要由哈代来做。

他成为这严格的新思维的代言人。他不仅用他所讲的内容来施加影响，他的强有力的、精辟优雅的演说和文章都引起很大的冲击。

在讲堂里，他热情洋溢，讲授的内容极其有趣，欢悦的气氛充满整个教室。他后来的一位学生蒂奇马什(E. C. Titchmarsh)说：“每个学生都觉得，这个世界里除了这些定理的证明之外，其他的事都无关紧要。”美国的数学神童，后来创立“控制论”的维纳(Norbert Wiener)说：“我听数学课这么多年，没有人能像哈代讲得这么清晰，有趣，并带有如此深厚的智慧力量。”三一学院的数学教学主任巴恩斯(E. W. Barnes)的一位学生，请教巴恩斯该选谁的课，他推荐哈代。这个学生拿不定主意，巴恩斯说：“选不选哈代随你便，不过不选的话你会后悔的。”很多年之后，这位学生回忆道：“真的后悔。”但事后追想，好些没有选哈代的学生可能并不后悔；因为哈代的热忱和感

染力是如此之强，没准会使那些本无根基或不适合学数学的学生也改读数学了。

他讲课流畅易懂，而他的写作却具有更大的冲击力。后来当他回想如果当时没有走数学这条路的话，会选什么职业时，哈代说：“我看在学术界之外，只有新闻界我还有成功的可能。”其实，凡是需要动笔的，那一行他都能做得很好。“他的文笔具有独特的简洁和朴实，可说是当时最好的英文作品。”斯诺曾这样说过他。哈代和拉马努金的关系常被众人谈起，他对拉马努金的影响被人如此频繁地引述，对拉马努金在历史上的定位起了那么大的作用，除了两人过往密切之外，他撰文介绍拉马努金时文笔之动人更是大有助益。

哈代后来对自己早期的文笔并不满意，认为太“粗俗”。当然，他不是也不喜欢自己的长相吗？“他所做的每件事，”斯诺又说，“都优雅，都井井有条，都有格调。”他的写作更是如此。他为《剑桥评论》(Cambridge Review)写罗素的哲学；他为有名的数学家所写的悼文都周到、感人，情文并茂；他的经典之作《一个数学家的自白》就因文笔之美而深入读者之心。

在全是数学的作品中，他也展现了写作的天赋。与人合作写论文时，执笔的一定是他，而且一直负责到发表为止。“他是原动力”，李特尔伍德回忆道。李特尔伍德自己写文章时，只要他所说的结果是对的就满足了，哈代则要求更高。所谓“原动力”的定义就是要妙笔生花，就像“黑板上的图，或其他能刺激学生想像力的东西”。写书评的人说：“哈代的书里，或是其他的文章里，有一股引人入胜的力量，这是无人能比的。”

哈代常常说，不用文字他是无法思考的。提笔写教材，写论文，是他乐趣的来源。把他的美感和睿智合而为一。如果你原来不知道数学枯燥无味，而且碰巧手上拿到了他的一页

文章，你会以为这是一张中国书法艺术的样本。因为这里有划过全页的不等式符号，1 英寸（约 2.5 厘米）或  $1\frac{1}{4}$  英寸（约 3.2 厘米）高的积分符号，加上好似五线谱音调号的  $\Sigma$  等等。他写的数学文章，篇幅宽松，笔法轻巧，不让数学符号挤在一起。好比是法国的印象派画家，一两笔就勾出一幅图画，而不像英国的雕刻匠那样精雕细刻。

20 世纪头 10 年里，哈代用他的笔启发一些年轻的英国数学学生重视欧洲大陆的严谨观念。1903 年，《泰晤士报》的文学副刊刊登了哈代为罗素的《数学原理》（Principles of Mathematics）写的书评。英国数学家对海峡对面发生的事多半是充耳不闻的，哈代就利用《数学杂志》（Mathematical Gazette）的版面评论外国书籍。1903 年他为一本德文书，施托尔茨（Stolz）和格迈纳（Gmeiner）的《函数论引论》（Einleitung in die Funktionen Theorie）写书评；1905 年又为一本法文书，博雷尔（Borel）的《实变函数教程》（Leçons sur les fonctions des variables réelles）写评论。

同时，英美的书若有不周全之处，他都一一严格指出。1907 年在《数学杂志》上他评论了美国人约翰逊（W. Woolsey Johnson）写的一本微积分教程。他说，在这一类型的教程中，这一本并不太坏，只不过这一类型的书英国气息太重，30 年前或许可以接受，如今则不能原谅。在讨论微积分的基础时，理论上的难解之处或许可以跳过，但是他写道：

跳过去的方法各有不同。例如，根本删去不提，当然这个方法有待商榷的地方很多。再不然，指出难处，但是明说要跳过去不谈。或者，稍稍讨论一下，得到一个勉强可以接受的结论，不过要说明白所用的推理并不精确。

哈代接着又说：

另外还有一种最不可取的方法，那就是用似是而非的证

明,所用的推理,表面上看上去不错,但是实际的困难完全没有讨论。这是托德亨特(Todhunter)教授[另一本类似的书的作者]的方法,约翰逊教授用这种方法的次数太多。

接下去,他就举一个例子说明作者的论证“完全缺乏正确性”。

哈代认为他还可以做得更好。在1908年完成了他的《纯粹数学教程》(A Course of Pure Mathematics)一书。这是第一本用英文严格地写数学概念的书。其他的书,为了要讨论实用问题或添加材料,很多地方对这些概念都一笔带过。哈代在序中说严格性是不可缺少的。“我曾[很难得地]碰到一个学生,在面对很简单概念,如无穷、极限或连续时,所具有的信心能和他面对其他难得多的题目时一样强。”

这本书,和哈代所写的其他文章一样可读性很强。所以这不是一本每页都是乏味公式的教科书。每一个难以理解的概念,他都用清晰中肯的散文笔法解说。在别的书中,那些被埋在抽象的数学符号里的概念,会从哈代的书中跳到你的面前,让你从悬在半空的疑虑之中得到“原来如此”的感觉。

例如,书中很早就讲到“有理数”,如 $6, 2/3, 112/3890$ ,或19等数。它们可以是整数也可以是普通分数。他说,一段直线上代表两个数的两点之间,可以再挤一个有理数进去。例如在 $1/2$ 和 $2/3$ 之间,可以放一个 $3/5$ ;在 $3/5$ 和 $2/3$ 之间,又可以放一个 $5/8$ ;一直做下去的话就可以得到无穷个点。然后他说:

照这些想法,读者可能会推出一个结论说这段直线上所有的点都代表有理数,即线上的每一个点都是有理数。如果我们假想这段线是由有理数构成的话,这个推论当然无误。其他的点(如果存在的),我们设想都被消去。剩下来的图形,看上去也很像是一条线,而且我们所知线段该有的特性,这剩下的图形也都有。

读者怀疑马上会有什么新玩意了,可不知是什么东西。

哈代接着便指出，在这同一线段上，在所有的有理数之间可以挤进去无穷个另一类的点——这就是“无理数”，它们不能用分数来表示。哈代于是开始研讨无理数的性质。

英国数学界所缺的就是这种对基本概念的关注。有一位评论此书的人说：“当哈代先生要证明某个命题时，他真的会证明……如果这本书有很多人读的话，至少我希望以后可以省掉许多时间，来向大学生解说，他们过去辛辛苦苦学会的‘证明’实在比废话好不了多少。”

哈代的书的确有很多人读。此书第一版问世后的四分之三个世纪里，先后共出了 10 个版次，并且每一版都多次加印。它是惟一本对英国大学数学教学影响很大的书。经过这本书——经过他在剑桥的讲授，经过他的论文和书评，经过他与其他数学家的来往——哈代使这种严格性思维不再为条顿民族所专有，而成为整个数学界的风尚。

哈代认为英国的数学如此落伍，其根源就是 Tripos 制度。开创之始，这个制度是为达到一个并不太高的目标所用的手段——决定申请学位者程度的高低；后来，Tripos 本身反而变成了目标。在哈代看来，Tripos 本意是用来提拔英国数学未来的带头人，结果反而成了他们的枷锁。

1907 年左右，他成了为改良 Tripos 而特设的一个小组的秘书。事实上，他认为改良只是第一步，最后应该完全取消。他也知道那时无法马上做到这一步，所以他后来对数学会报告说：“依我看，这个制度在原则上就不对，其腐败的程度并非改良两字可以解决。我不赞成改良，这个制度根本就应该取消。”

哈代并不反对所有的考试，他认为考试有它的地位，不过地位很低——它是一个底线，是取得学位的最低标准。“考试

只要标准不太高，”他说，“是无害的。”可是 Tripos 就不是这样，它被用来评估、筛选和分等。在哈代看来，一个大学生“何必跟导师一起弄得精疲力竭，何不舒舒服服地做个二等生，却一定要苦苦地爬到头等”。他认为问题就在这里：由于这个考试制度，教和学都扭曲了，倒霉的是英国数学。

在几位比较年轻的资深人员的合作之下，哈代终于使管理校政的理事会很不情愿地答应了一些改革。最主要的就是分等而不分名次。从 1910 年开始，Tripos 成绩只分优等 (Wrangler)，二等 (Senior Optime) 和三等 (Junior Optime)。“优等第一”这个头衔被取消了，所以减轻了不少压力，也用不着再为夺魁而聘请私人教师。一夜之间，这种制度的最坏的积弊就除掉了。

但是哈代的野心更大的其他目标都没有成功；改良过的考试仍然存在——这是因为虽然指摘的人士很多，但是没有几位像哈代那样大声疾呼。英国人的个性中似乎总有适可而止的界限，取消这个考试制度似乎是越了界。后来有人对英国的数学界人士说：“给英国人提供革命性的改革是无用的。已存在的制度总有它的长处，这种想法根深蒂固，积弊也由此而生。……不完善的东西一次只改一点，这是英国人的方法，一直到渐渐达到目标。”哈代的好朋友李特尔伍德也不相信这种考试，但不是那么激烈地反对。“我不能说我受过心灵上的困扰，”他在写他的经验时说，“事情怎么来，我怎么应付。似乎没有什么困难，有时我还为自己能巧于应付而自傲呢。”

哈代的反感则非常强烈，几乎无法理喻，显然是经验使然。早在 1896 年，面临这个考试将带来的煎熬，几乎让他完全放弃数学。最后他还是低声下气地请了私人导师来准备应付考试，并且把“真”数学放在一边。当他和考试搏斗完毕，他几乎承认自己“失败”了，以他那好强的标准来说，优等第四名

当然算失败。他输给了 Tripos。

哈代的痛心疾首又与他的个性不合。他这个人——朋友们说他“好似走江湖的卖艺人，时时要玩很难的把戏”——稍有挑战就要比个高下，爱争输赢，不论是新知还是旧友总要把人考问到底，数学上的成果一定要达到最高标准。但他却如此痛恨 Tripos，这个考试的最高标准。

哈代严厉苛求，但心地宽厚。真所谓金刚面目菩萨心肠。他口里说对能力差的学生没兴趣，其实只是说说而已，因为他从来没有让他们不及格过。“他想都不会这么想，”一位在他手下做过研究工作的学生卡特赖特(Mary Cartwright)告诉另一位朋友说，“因为他对弱者是十分仁慈的。”

哈代鄙视社交的俗套，同时也和上帝保持一段距离。可是他又很宽厚，善解人意。从他为别人写的悼文就看得出他的气量宏大。有人说：“每一位数学家都会希望自己的行动真能如哈代所追述的那样。”

哈代要求很高，与人保持距离，情绪收敛；同时待人宽厚，亲切关注。这是来自父母亲不同的影响。而不论来自何处，他的性格中一直存在着两股互斥的力量。以后的 7 年里，在他和拉马努金的关系中也看得到这两股力量。

1913 年的冬天，欧洲在动荡，军队在征集，世界在不安的变化中。一年前，毕加索(Picasso)的立体主义绘画开始出现；两年前，季阿吉列夫(Diaghilev)的俄罗斯芭蕾舞团在伦敦首次演出，现在正准备在巴黎首演斯特拉文斯基(Stravinsky)的情感激烈的《春之祭》(Le Sacre du Printemps)，剧中一位少女跳舞直到死为止；1910 年爱德华突然病故，皇位传给乔治五世；1911 年国会通过法案，剥夺了上议院对下议院议案的否决权；英国几乎全国都在罢工，激进的参政妇女四处捣乱；爱尔

兰也蠢蠢欲动。

在剑桥,一切都和往常一样。哈代快 36 岁了,可是相貌上一点都看不出来。他到内维尔庭院找罗素谈柏格森(Bergson)及宗教哲学;有一回他碰到维纳和他的父亲,后者以为他还是个大学生。1912 年哈代又发表了 9 篇文章,包括他和李特尔伍德合写的第一篇“丢番图<sup>\*</sup>近似的一些问题”。1913 年底发表第一篇讨论傅里叶级数的关键文章,第二年又将他那部有名的教材重新修订。哈代在使徒社的朋友吴尔夫刚从锡兰回来,发现剑桥和他离开时没有什么改变。他坐车回伦敦时写道:“我感到欣慰和温暖,度过一个周末。还是那个剑桥,老朋友们又在老地方欢聚。使徒社,三一学院的大庭院,哈代和滚球戏——这是我年轻时代留下的永恒的真理和价值观——和我 7 年前离开时一样。”

哈代的日常生活也毫无改变。每天都读《泰晤士报》尤其是板球记分。上午工作 4 小时,在大厅里吃一顿简单的午餐,下午打一场网球。工作顺利,生活舒适,前途稳定。

这时,从印度寄来了一封信。

\* 丢番图(Diophantus),约 246 ~ 330,希腊亚历山大时期的数学家。——译者

## 第五章

## “谨自我介绍如下”

(1913~1914)

## 1. 信 件

来自印度的这封信，装在一个大信封中，贴着印度邮票，日期和地址是“马德拉斯，1913年1月16日”。信是这样开始的：  
尊敬的先生：

谨自我介绍如下：我是马德拉斯港务信托处的一个职员，年薪仅20英镑，23岁。我未受过大学教育，但已学完通常的中学课程，离开学校后，我仍以闲暇时间攻读数学。我未能按常规按部就班地学习正规的大学课程，但我在开辟我自己的道路。我对一般的发散级数作了专门的研究，本地的数学家们说，我所得到的结果是“令人惊奇的”。

一个不为人知的、远在5000英里(约8000千米)以外的小小职员，看来是想得到人们的怜悯和好奇。“我未能按常规按部就班地学习正规的大学课程”这句话听来有点自我吹嘘。到了第二段，他坚持说，他能定义自变量取负数值时的 $\Gamma$ 函数。到了第三段，他干脆就反驳起哈代3年前为《剑桥数学与数学物理学丛书》(Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics)写的一本小书来了。

这本书名为《无穷大之阶：保罗·杜·布瓦-雷蒙的“无穷大计算”》(Orders of Infinity: The ‘Infinitarecalcul’ of Paul Du Bois-Reymond)。哈代在其中讨论数学函数趋于无穷大有快有慢的

问题。例如,  $f(x) = x^3$  比  $g(x) = 3x$  更快地接近无穷大。当  $x$  变大时,两者都无限增长;马虎一点儿说,都会“达到”无穷大,但是第一个比第二个要快得多。例如当  $x = 100$  时,第一个函数会暴涨到 1 000 000,而第二个还只停留在 300。哈代在书中有一处引用了素数理论中的一个公式。公式中第一项包含对数,第二项  $\rho(x)$  是误差项,表示第一项会有多大的误差。哈代在第 36 页上说“ $\rho(x)$  的准确阶数尚未确定”。

于是,拉马努金告诉哈代,这个准确阶数已经确定了,而且就是他确定的。他写道:“我已经找到了[ 素数个数的 ]一个公式,它非常接近真实的值,其误差可以忽略不计。”他说的公式在数学界称为素数定理,它最早是由勒让德(A. M. Legendre)给出的,然后又由高斯改进,但仍不够完整。而他,一个默默无闻的印度小职员,居然得到一个更好的结果。

拉马努金就是用这个钓饵吸引了哈代的注意。他的信是这样结尾的:

我谨求您读完所附的论文。因为我很贫困,如果这论文多少还有一点价值的话,请您发表我的这些定理。我没有写出全部的研究,也没有给出我所得到的表达式,但我已经指出了我前进的路线。因为我毫无经验,您给我的任何指教,我都将极为珍视。有劳之处,尚祈见谅。

您真诚的  
S·拉马努金

当然,这只是开头而不是结尾。接下来就是拉马努金所说的“所附的论文”,共有 9 页之多(可能还包括一篇他已发表的关于伯努利数的论文)。第一页开始读起来像是专利申请报告,用语掷地有声:

我已找到表示小于  $x$  的素数个数的准确函数式。“准确”是指此函数与素数的真实数目之差一般为 0 或为一有限数,即使当  $x$  变为无穷大时也行。我把所得到的

函数以两种形式写成无穷级数。

我也找到了一个公式,它能把小于不论多大的形如  $An + B$  的素数的个数表示出来,

我还找到了这样的公式,它们不仅能表示非规则增长的函数,还可以表示非增的不规则函数(例如自然数的因子的个数),不仅给出其阶,而且给出其准确的形式。下面就是从我的定理中选出的几个例子……

下面基本上再没有通常的英语了,取而代之的是代数、三角和微积分的语言。有数论中的定理,计算定积分的定理,无穷级数求和的定理,变换级数和积分的定理,对级数和积分给出精细近似值的定理——大约有 50 多个。

全信共 10 页,是用很大的易于辨认的匀称的学生字体写的,要说有特别之处就是字母 t 上的一横漏写了。他的笔迹从来是整洁的;而这一次,更是尽可能地整洁,好像他已经意识到,在他与哈代之间有一条怀疑的鸿沟,而信笔涂鸦只会扩大这条鸿沟。

预防这一点确实很明智,鸿沟的确不小。拉马努金满页的定理对于哈代犹如一个诡异的树林,其中的树还相当熟悉,可以称之为树,但又如此奇特,犹如来自另外一个星球。首先打动了哈代的正是拉马努金的定理之奇特,而不是其才气光彩夺目。起初哈代心想,这个印度人又是一个怪人。因为他常收到陌生人来的怪稿件,正如他的朋友斯诺后来所说:“这些稿件有的自称证明了大金字塔的预言的智慧,有的自称解读了锡安(Zion)的长老的启示,有的自称破译了培根(Francis Bacon)藏在据称是莎士比亚的剧本中的密码。”

哈代草草一瞥之后,就把这稿件放在一旁,专心去看当天伦敦的《泰晤士报》了。1913 年 1 月晚些时,该报上登的多是

诸如鸦片在中国之泛滥成灾,里斯本港口工人罢工,或是法国与阿拉伯叛军在莫加多儿(Mogador)交战,或是上议院辩论爱尔兰的地方法规……他可能跳过了关于巴克斯顿(Buxton)离婚官司的报道,巴克斯顿夫人被控与某勋爵通奸。但是他不可能不看英国橄榄球队在特威克纳姆(Twickenham)球场 12 000 多观众前以一球胜法国的消息。

大约 9 点,他开始搞数学,直到下午 1 点左右,然后他漫步来到大厅午餐。餐后去格兰治路(Grange Road)的大学庭院里打一场“真正的”网球(这是英国人对室内网球的叫法,它比现在流行的草地网球早些)。但是,他的意念中的一角,本来会因激烈的体育活动而平静的,那一天却出了什么毛病——印度来的稿件在折腾他的思想,使他不得安宁。正如斯诺形容那封信是“狂野的定理,那些他从未见过也从未想到过的定理”。

这些匪夷所思的定理难道是愚蠢的、不足道的,或者干脆就是错的、毫无根据的?或者正相反,它们是某种特异天才的奇葩?

也没准就是开一个玩笑?不管怎么说,这种恶作剧那时是很流行的。印度文职人员中身居高位的英国人许多都曾通过数学 Tripos 考试,或由某种原因对数学相当熟悉——说不定熟悉得能玩这种把戏。还有什么更好的办法来作弄一下剑桥的老朋友哈代呢?您可以把熟知的“定理”披上人们不熟悉的外衣,故意变怪相。但在印度谁是个中高手呢?说不定,这个恶作剧是从欧洲来的;但是这个捣乱的家伙会费那么大的劲去搞一个真正的马德拉斯邮戳吗?

这些飘忽不定的零星思绪不断出现在哈代的头脑里。打完网球,他走过剑河上的一座桥,再走过后院广阔的草地,穿过大门进入新庭院。回到位于一个大门通道上面自己的套

房,他再次拿起印度来信坐下来读。透过那哥特式的石框窗口,已是冬日的苍茫暮色。

多年以后,拉马努金信中的那些公式绝大多数成了《伦敦数学会杂志》(Journal of the London Mathematical Society)或其他刊物上的论文题目。在其中,作者们,包括哈代本人,要用上2页,5页,甚至10页的篇幅才能系统地证明那些人们不知道的定理。但是哈代现在的目的可不是去证明它们。现在,能看出其中的确有东西,哈代就满足了。连这一点也非显而易见——这部分是因为,如哈代后来说的:“一个常数或参数取特别的值,就会使一个公式的真正含义难于掌握了。”粗略地说,好比“一分聪明,十分糊涂”这句俗话,拉马努金偏要说成“三分钱的聪明,四块五毛钱的糊涂”——弄得听者一头雾水,不知所云。总之,这使哈代加倍感到困惑。

夜色降临,快该吃晚饭了,可是这些公式一个也没有弄顺,写信人的本色也没搞明白多少;是天才还是骗子?老翻着这几张纸呆想也搞不清楚。对了,哈代决定了,也得叫李特尔伍德看看这些公式。

约翰·伊登索尔·李特尔伍德刚好比拉马努金大两岁。可是,当拉马努金在印度彷徨无依的时候,他却得到了英国最好的数学教育。

他是英国一个小地主家族的后裔。据说,李特尔伍德家族的弓箭手们参加过1415年的阿金库特(Agincourt)战役。在近代,他的祖辈总是中产阶级的专业人员——如牧师、小学校长、出版商与医生之类。他的祖父与父亲都曾在剑桥学过数学;他的祖父后来成了神学家,父亲则是南非一个小学校长。约翰在南非住过8年,14岁时回到英国,进了圣保罗学校,他在那里得上了数学瘾。

他在自己写的小书《一个数学家的杂记》(A Mathematician's Miscellany)里,李特尔伍德既不夸张也不掩饰自己是一个“神童”。是不是神童都一样,他所受益的教育正是拉马努金完全得不到的。当拉马努金在读《龙氏三角学》时,李特尔伍德也在读它。但是,拉马努金的正式数学教育仅仅如此,而李特尔伍德还才开始呢。以后的3年中,他继续读完了麦考利的《几何圆锥曲线论》(Geometrical Conics),史密斯的《解析圆锥曲线论》(Analytic Conics),爱德华兹(Edwards)的《微分学》(Differential Calculus),威廉姆逊(Williamson)的《积分学》(Integral Calculus),卡赛(Casey)的《欧几里得续论》(Sequel to Euclid),霍布森的《三角学》(Trigonometry),劳恩(Routh)的《质点动力学》(Dynamics of a Particle),默雷(Murray)的《微分方程》(Differential Equations),史密斯的《立体几何》(Solid Geometry),伯恩赛德(Burnside)和潘顿(Panton)的《方程论》(Theory of Equations)等等——全是在1902年12月进入三一学院的人学考试前读完的,而那时拉马努金还没有看到卡尔的书呢。

两年后,1905年,李特尔伍德获得Tripos的优等第一名,但是按惯例他本应得到的研究助教职位,却被另一个人神秘地得去了。以后的3年,他离开剑桥去曼彻斯特大学任讲师。在这个“流放”期间,他经受了讲课、会议和种种文书工作的重负——这本是外地大学教师的正常命运。然后,从1910年起,他又回到三一学院,从此定居于此。

他的两位传记作者都说他是一个“粗犷而又具有特殊魅力的人”。他是一个强壮、充满活力的男子汉。在中学时,他就是一个运动好手,打过板球,有可能成为一个攀岩运动员或滑雪运动员;甚至到了80多岁,还可以看到他在英格兰东部剑桥附近乡下步行远足。他个头不特别高大,有一张他穿着大学教袍讲课的照片,照片里的他像是一个笨拙的、男子气概

的大块头。另一张他和哈代的合照中,李特尔伍德几乎占满了画面;帽子端正,一肩前倾,两腿分开,好像要去打仗,而小个子的哈代却像是被挤到角落里去了。

李特尔伍德和哈代一样终身未娶。但与哈代不同的是,他极乐意置身脂粉堆中。在曼彻斯特时,他们那一群人中他的舞跳得最好。他甚至敢于这样描写他的祖母,说她是“来自一个能干的家族的了不起的人,不幸的是她太像一个圣女”。他可不这样圣洁,他和一位有夫之妇的绯闻闹得剑桥尽人皆知,他和这位夫人的家庭长期同住在康沃尔郡(Cornwall)的一栋房子里,后来还与她生了一个女儿。

作为一个数学家,李特尔伍德是“最适合冲击深刻而困难的问题,善于打硬仗的人;再没有别的人能像他那样,洞察力、技巧与才智合于一身而运用自如”,这是哈代讲的话。两人初见,或者只是神交,是在 1906 年。当时李特尔伍德一篇投交伦敦数学会的论文引起了争议,而交由哈代审查。当李特尔伍德 1910 年回到三一学院时,两人合作极其密切,所以哈代在《无穷大之阶》一书(就是拉马努金在印度看到的那本书)的序言中要感谢李特尔伍德的帮助。

他们真正的合作一开始并不太顺利,1911 年 6 月他们合写投交伦敦数学会的论文的证明有毛病。但后来,他们合写了 100 多篇文章,第一篇发表于 1912 年,两人从此在数学上就难舍难分了。难怪有人说“现在只有 3 个真正伟大的数学家,就是:哈代、李特尔伍德以及哈代—李特尔伍德”。因为李特尔伍德看不起那些锋芒毕露的同伴,而且不愿参加数学会议,所以有些人——至少开玩笑说有这样的人——怀疑世上是否确有李特尔伍德其人。当然确有其人,所以哈代在 1913 年收到拉马努金的信时,自然想到把信交给李特尔伍德去看。

不久前,李特尔伍德搬到了内维尔庭院 D 号楼梯处的房

间里。站在楼梯底下的拱形门道上,通过拱门的门廊,就可以看见围在里面的庭院。这一景象极其吸引人——这可能就是他直到1977年去世一直在这里住了65年的原因之一。从哈代的房间出来,沿着环绕的楼梯下行19个梯级,出大门进入内维尔庭院,转到D号楼梯也就是40步路,然而这两个人通常是靠邮件和校役传达交往,在任何情况下都不亲身去找另一位面谈。

在1913年那个冬日的傍晚,哈代找校工送信去约他在大厅见面。

斯诺后来回忆,他们是在九点钟左右,大约在李特尔伍德的房间里见面的。稿件很快就摊在他们面前了。有些公式是他们熟知的,而另外一些,哈代写道“似乎很难相信”。20年后哈代在哈佛大学的一次演讲中,请他的听众一同回顾那个大大丰富了他的一生的日子。“我请您们先和我一起回想一下,”他说,“一个通常的职业数学家收到一个素不相识的印度小职员的这样一封信时,直接的反应会是怎样的。”因为听众都是数学家,所以哈代请他们看拉马努金的几个定理。下面这个公式来自稿件第3页的底部:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{-x}{b+2}\right)^2}{1 + \left(\frac{-x}{a+1}\right)^2} \cdots dx \\ = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(a + 1/2) \Gamma(b + 1) \Gamma(b - a + 1/2)}{\Gamma(a) \Gamma(b + 1/2) \Gamma(b - a + 1)}$$

这里方程左边的长长的S形符号,信中许多方程中都出现,这是一个积分号。这个记号来自牛顿的老对手莱布尼兹。积分——这个概念可以追溯到希腊人——本质上就是一个加法,一个和,但这是一个特别的、精确的、乍一看叫人很心烦的

那种加法。

设想把一根热狗切成一个个小圆片,您可以把 10 个每片半英寸(约 1.3 厘米)厚的小片再拼起来,也可以把 1000 片其薄如纸的小片拼起来。但是不管怎么切,您总能把它重新还原成一根热狗。积分学——数学的这个分支就是采取了这样一个办法,找一个数学式子把无穷多个薄片再放回到一起,成为一个整体,亦即“积分”。这个强有力的过程可以用来计算当机翼切过空气时受到的总阻力,可以计算地球对人造卫星的引力。总之,凡是要把许多微小的影响拼合起来,从而找出总的影响,这一类的问题都可以用它来解决。

计算一块整齐的矩形田地的面积时,不必用积分,只要把长与宽相乘就行了。但是您也可以用积分去计算。对于形状不规则的麦田面积,用长乘宽就不行了,您可以利用机翼和卫星的求和方法去解决。设法给出在数学上定义这个不规则形状的函数,原则上就可以通过“积分”该函数来求出不规则图形的面积——即以一种特殊的精确规定了的加法程序来完成它。

微积分书中有上百种求函数积分的方法。然而,信手拈起一个函数,大有可能是无法把它求积的——至少是不能直截了当地做。用拉马努金给哈代的信上讲述的那些“定积分”,您却可以找到一种“走后门”的解法。

定积分之所以为“定”,就在于您是在一个确定的数值范围内去积分一个函数。那个长长的 S 形符号顶端和下端的小数字——如拉马努金的方程中的  $\infty$  和 0 ——表明了这个范围(换句话说,就是把您想计算其面积的那一块麦田标出来)。当您计算定积分时,您不必操心去找出一般的代数公式(不定积分则是这样),而原则上是要算出一个确定的数。如果使用正确的数学工具,有时您不必先去积分这个函数也能确定这个数,即使这个函数不可能积分也没关系。

大体上说,拉马努金第3页信纸上的定理,以及标题为“IV. 关于积分的定理”的整整一节,做的就是这样事。

他是说,这个特殊的积分可以用 $\Gamma$ 函数(读作伽马函数)来表示。( $\Gamma$ 函数有点像常见的“阶乘”,例如 $4!$ 读作“4的阶乘” $=4\times3\times2\times1$ ,不过 $\Gamma$ 函数把阶乘的思想推广到整数以外的数。)哈代自忖能够证明这个定理,后来他试验了,成功了,不过比原来设想的更难。拉马努金的其他积分没有一个是轻而易举的练习,而且所有这些积分计算后来都成了专题论文。然而,哈代仍然认为,这些积分只是拉马努金的结果中最无足轻重的。

更难一些的是无穷级数。其中两个如下:

$$\begin{aligned} 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \cdots &= \frac{2}{\pi} \\ 1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right\}^2} \end{aligned}$$

第一个级数哈代并不生疏,它原是一个名为鲍尔(Bauer)的数学家之作。第二个就不同了。对于一个外行,它和拉马努金信中类似的那些公式,几乎都是令人望而生畏的;其中除了 $\pi$ 和 $\Gamma$ 函数外,都是普通的数字。但是哈代和其他人将会说明,它们怎样来自一种叫做超几何级数的函数,后者原是欧拉和高斯研究过的,而这些公式在代数上可以说要多难就有多难。

哈代后来才知道,在1910年前些时,拉马努金就已经得到一个一般的公式,后来以道加尔(Dougall)—拉马努金恒等式著称。在正确的条件下,由这个公式可以喷涌出一大堆无穷级数,有如大工厂酿造啤酒的发酵罐。拉马努金的级数中,普通的数字也是复杂的数学机器制造的貌似简单的最终产

品。当然,哈代在收到拉马努金的信时,并不知道这一点。他只知道这些级数公式并不像它们看起来那样。和积分比较,这些级数对于他要“麻烦得多”,他很快就明白了“拉马努金是袖里有乾坤,他必然知道广泛得多的定理”。

当然,拉马努金的信中有些公式,看起来熟悉而顺眼。例如:

若  $\alpha\beta = \pi^2$ , 则

$$\alpha^{-\frac{1}{4}} \left( 1 + 4\alpha \int_0^\infty \frac{x e^{-ax^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx \right) = \beta^{-\frac{1}{4}} \left( 1 + 4\beta \int_0^\infty \frac{x e^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx \right)$$

哈代证明过类似的定理,甚至在 14 年前就把一个类似的定理作为征解的数学问题登载在《教育时报》上。拉马努金有些公式甚至可以追溯到一个世纪以前的拉普拉斯(Laplace)和雅可比(K. G. J. Jacobi)。当然,这个印度人重新发现了它们也是很了不起的。

那么,哈代又是怎样来看拉马努金信中最后一页的以下公式呢?

$$\text{若 } u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^{10}}{1 + \frac{x^{15}}{1 + \dots}}}},$$

$$v = \frac{x^{1/5}}{1 + \frac{x}{1 + \frac{x^2}{1 + \frac{x^3}{1 + \dots}}}},$$

$$\text{则 } v^5 = u \frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}$$

这是一个连分式,是用压缩形式写的,其中函数  $u$  是表示下面的关系式:

$$u = \frac{x}{1 + \frac{x^5}{1 + \frac{x^{10}}{1 + \frac{x^{15}}{1 + \dots}}}}$$

几年后这个公式发表时,引起了美国数学家们一阵兴奋,罗杰斯(Leonard James Rogers)在1921年发表了一个长达10页的证明。达林(Darling)也探讨过它。1929年,沃森(G. N. Watson)从另外的角度来处理它,试图在关于θ函数这个充满荆棘的数学领域中开出一条路来。但哈代在1913年完全弄不明白,把它归入了拉马努金的一组定理。关于这些定理哈代后来写道:“使我束手无策。我连稍微有点像它的任何东西都从未见过。只需看一下它们,就知道它们只能是出自最高级的数学家之手。”然后,哈代又以自己特有的激动心情继续写道:“它们一定是正确的。如果不正确,谁也不会有这样高的想像力去想出它们。”

哈代和李特尔伍德深入地探查他们面前的定理,竭力弄清它们究竟说的是什么,在数学典籍中它们应归属到哪里,怎样证明或否定它们。这时他们开始得出一种判断:这个印度人的数学既奇怪而又有个性,从一开始就很清楚,但是现在他们越发看出,他的工作里还有更多的什么。这可不是那些老爱反对这反对那的十来岁少年的“个性”——那无非是以奇装异服、古怪发型来掩盖平庸罢了。拉马努金的个性内涵要多得多。哈代后来这样写道:“拉马努金的每一个公式所包含的总比显示在人眼前的要多,只要试图去论证其中看来是最容易的,马上就会发现这一点。其中有一些,其意义非常隐晦,另外一些比较明显;但没有一个不奇特,不令人叹为观止。”

他们越读下去,越感到眼花缭乱。他们在三一学院的同事内维尔后来写道:“这位我们谁也不认识的小职员寄来的没有证明的定理,没有任何一个人会把它们作为世界上最高深的数学考试题目。”哈代愿把拉马努金的信归之于“我历来收到过的最出色的信”之列,而其作者则是“具有最高品质的数学家,一个具有举世无双的富有独创性的智者”。

将近半夜，哈代和李特尔伍德开始醒悟到，在这 3 个小时里，他们审查的是一位数学天才的论文。

一封信就开辟了一位著名数学家的生涯，这可不是第一次。其实，数学家莫德尔 (Louis J. Mordell) 后来一直坚持说：“一个人如果做了出色的数学工作，并想引起数学界的注意，这实在是容易不过的事，不论这个人是如何位卑而且默默无闻，他只需做一件事：把他对结果的论述寄给处于领导地位的权威就行了。”雅可比就椭圆函数写信给勒让德是这样做的，埃尔米特 (Charles Hermite) 就数论写信给雅可比也是这样做的。

然而，如果真的像莫德尔所说的是“容易不过的事”，那么为什么高斯会轻蔑地拒绝阿贝尔呢？高斯是他的时代——甚至可能是一切时代——的头号数学家。挪威人阿贝尔写信给高斯时只有 21 岁，那时他就证明了有些五次方程（例如  $x^5 + 3x^4 + \dots = 0$ ）永远不可能代数求解\*。这是真正的重大一击，特别是因为多年来，领头的数学家都在寻求一个通解，现在阿贝尔出来了，证明这是做不到的。然而当他把他的证明寄给素称“数学王子”的高斯时，高斯看也不看就把信丢在一旁。有人记述，当时他把阿贝尔的论文说成是骗子的作品，贬为“又一个怪物”。

再说，如果真是“容易不过”，为什么拉马努金的信对另外两位剑桥数学家贝克和霍布森却没有同样的魔力呢？拉马努金给这两位也都写过信。

收到这封信时贝克已经 48 岁，他可以算得上莫德尔心目中的“处于领导地位的权威”。他主持一个特殊的凯莱 (Cay-

\* 应为不能用根式求解。时为 1826 年。——译者

ley)讲座。1898年32岁时就当选为英国皇家学会会员。1910年他又得过西尔维斯特奖章(Sylvester Medal)。直到收信的前一年,他都是伦敦数学会主席。

但是贝克的一位传记作者在他死后说他“几乎全未受到哈代于20世纪头10年中在剑桥分析数学界引起的革命的影响。在这个时期,贝克的地位基本上是老一代数学家中的一位长者”。当然,他与哈代之格格不入本身并不能说明他何以对拉马努金态度冷漠,然而这确实表明他对接受新观念比较保守。确实,人们说,贝克对过去年代的伟大数学家如此尊敬,以致堵塞了自己的独创性。收信时他马上就要再婚(1913年),这也可能使他不那么欢迎一个不知名的印度小职员来烦扰他。

剑桥的另一位数学家霍布森,也是一位优等第一名。已年近60岁,甚至比贝克更负盛名。他高高的前额,威武的小胡子,还有逼人的目光,正如哈代说的,使他成了剑桥附近“引人注目的出众的形象”。

但是在人们印象中,他又是一个枯燥的讲演者。在他身后,人们总是用“系统的”、“无遗漏的”以及“内容丰富的”这样一些话来形容他的最重要的著作,而没有一句话表示其中有什么想像力在闪光。有人曾称他是“泥潭里的老树干子”。他曾经当了好几年 Tripos 教练(受教者之一就是后来的经济学大师凯恩斯),而把数学研究抛掉了。他对即将爆发的世界大战持常人见解,而且激烈反对给妇女授学位。这样一些秉性当然使他几乎无法接受出自非正统而自己又不熟悉的定理了。

当然,拉马努金的命运好比是在刀刃上走,只要想像力稍微欠缺一点,或者有一瞬间的犹豫,他就会倒运了,他能得到拉马钱德拉·拉奥的支持,全是靠了他的朋友拉贾戈帕拉查里不折不挠的执著支持。哈代本人在被他的信征服之前,也曾对之厌烦。犹如打牌,那些有创造性的人得到的牌总是不顺

手的。而这样对待他们也许是对的，毕竟许多披着“新颖独创”虎皮的人，确实是新，也确实是独创——然而除此以外就什么也没有了。所以，在一定意义上，霍布森和贝克说“不”，既不令人吃惊，也无可非议，顶多给以最温和的责备罢了。

其实也不值得奇怪，在印度没有人能理解拉马努金的工作。哈代大概是英国的头号数学家了，是最良好教育的受益者，与数学思想的最新发展一直共脉搏。更有甚者，他还是拉马努金耕耘的好几个领域的专家。即使这样，和拉马努金的信打交道，还使他困惑了一整天：我连稍微有点像它的任何东西都从未见过。哈代也和印度人一样并不懂拉马努金的工作。他和他们一样也怀疑过自己的判断。说实在的，使他日后大负盛名的不仅是看出拉马努金的天才，更重要的是他冲破了自己的怀疑之墙。

拉马努金是印度人这一点在哈代眼中大概没有留下污点。老实说，哈代关于印度的知识，和大多数英国人一样，沾染了英帝国的污泥。当他 10 岁还在克兰利学校念书时，校刊有一天登载了一篇特写“一个印度集市”：处处是戴着珠宝的女郎，身带匕首的廓尔喀人 (Ghurkas)，满口脏话的骗子，咬牙切齿地低声骂着“英国狗”。但是到了 1913 年，哈代已经和一些印度人有了数学上的接触。1899 年印度阿拉哈巴德 (Allahabad) 的一位数学教授乌姆斯·钱德拉·高希 (Umes Chandra Ghosh) 就解出了《教育时报》上哈代征解的最早一批数学题目之一。1908 年，哈代的另一个关于无穷级数的问题又得到 V·拉马斯瓦米·耶尔的解答。此人两年前创立了印度数学会，两年后又成了拉马努金的朋友。[此外还有板球的轰动人 物印度人兰吉青吉 (Ranjitsinhji)，又是哈代大学年代中意的人物，这也可能有助于清除残存的偏见。]

生长在蹄铁巷，曾经就读于克兰利学校，这些可能都使哈

代比剑桥的其他教师更容易看出被古怪外表掩盖的优点。他终身都同情弱者。卡特赖特，在拉马努金之后若干年才认识哈代的，回忆起自己作为一位女数学家，说“我是属于被压制阶层的”，然而也因此得到了哈代的青睐。斯诺写道，比之“那些他称为只有大椅子才坐得下的人——这当然是指心理上而言——[他们]就是那些自以为是的、暴发的、英帝国主义的资产阶级。这些只能坐大椅子的人包括那些主教、校长、法官、政客……”哈代更倾向于各种被踩在下面的人。哈代去看一场板球比赛时，如果对比赛者全不认识，他会当场定出自己的好恶。他喜欢的“一定是那些鲜为人知的，来自不出名学校的年青人、印度人，或运气不好而胆怯的一方。他希望他们打胜，反过来说，也就是希望他们的对手打输”。

使命运的天平更倾向拉马努金一方的还有一点，就是哈代总喜欢脱离安全的轻车熟路。霍布森和贝克都属于老一代，养尊处优，大概都已到了一生中对新东西不太热切的年纪。哈代相反，属于年轻一代，倾向于非正统的、出乎意料的东西。他曾离开克兰利去温切斯特学校；他曾被第六流的作家“阿兰·圣·奥宾”引向三一学院，然后又接受洛夫教授的建议，一头钻进约当的《分析教程》；他加入使徒社；还打破惯例，在二年级而不是三年级就参加了 Tripos 数学考试。

每一次哈代都打开了自己的心扉，每一次他都使自己更加丰富。现在一封来自印度的塞满数学公式的长信，又作为一个狂野的、异样的新东西展现在他面前。哈代又一次打开了自己的心扉和意念，他再一次备受其益。

## 2. 我得到了一个朋友

“当时剑桥数学界的每一个人，谁也不会忘记[拉马努金

的]信造成的轰动”,内维尔多年后这样写道。哈代到处给人看这封信,给一些特殊领域的专家寄去了信的一部分(在激动之中,有一页信的公式反而遗失了)。同时,哈代开始行动,向在伦敦的印度文职官员表示自己对拉马努金的兴趣以及把他请到剑桥来的意愿。

直到2月8日,一个多风的星期六,哈代生日的第二天,他坐下来给拉马努金写信,信中写出在剑桥人已共知的关于拉马努金的才能的评断。他在信头上写下了发信地点:“三一学院,剑桥”,发信日期,然后是正文:“尊敬的先生大鉴:我对您的来信和定理极感兴趣……”这样开头的信,拉马努金不能不读下去了。

紧接着下一句,哈代就给出了第一个警告:“然而您应该理解,我必须看到您对某些结论的证明,才能适当地判断您所作的工作的价值。”

证明这个词在拉马努金的数学生命中已经不是第一次出现。卡尔的《汇编》,就是拉马努金表达数学结果的典范,其中可没有证明,最多只有几个字的提要。对于卡尔,因而也就是对于拉马努金,这就已经够了。哈代现在却说这还不够,断言一个结果,不管它看起来多么像是对的,但还是不够。哈代在给拉马努金的信中,一再坚持这个观点:

我特别希望看到您在此的断言之证明。您需要理解,在这个理论中,一切全都依赖于证明的严格精确性。

然后又说:

假如您的证明是严格的……

还有:

当然,在所有这些问题中,一切都依赖于绝对的严格性。

整个说来,哈代的信充满了鼓励。确实,拉马努金有一些定理是已知的,或者只是已知定理的简单推广。尽管如此,哈

代仍然承认这是一种成就。“我无须谈论您是否缺乏训练，事实是，您所重新揭示的这些有趣的结果，已为您大增光彩。”

然后，哈代也大胆猜测，拉马努金有些结果，尽管只是小小的注解，说不定是某种一般方法的例证，所以比它们表面上看起来更为重要。“您总是把自己的结果以特殊形式写出来，从而使人很难确定我的上述说法。”

哈代说，李特尔伍德对拉马努金的工作也很感兴趣，甚至在信后还附了一个“李特尔伍德先生提出的进一步的注记”。其中绝大多数是关于拉马努金有关素数的工作，在这个领域里，李特尔伍德最近得到一个尽管还没有发表，却会使人目瞪口呆的进展。所以哈代的信中转达了李特尔伍德的一个特别热切的请求：“请将关于素数的公式以及……寄下”，然后还是那句话“并请寄来尽可能充分的证明”。

哈代的全信都是这样——急切、兴奋之情跃然纸上，拉马努金若非木石，必能体会到。第6页末尾，哈代写道：“极盼尽快”——这里粗粗地下加横线穿过全页——“寄下您的证明，再于闲暇时更以您关于素数和发散级数的著作之详文见示。”

他继续写道：“想必您已做了大量值得发表的工作；若您肯示以满意的证明，我将欣然为其发表而效力。”

哈代的信大约是在2月第三周末寄到的。但他为拉马努金所作的担保却早已到达马德拉斯。哈代在写信给拉马努金约一周之前，就已与印度文职人员联系。大概在2月3日，一位名为马利特(Mallet)的先生就已去信马德拉斯的印度学生咨询委员会秘书阿瑟·戴维斯(Arthur Davies)先生。2月下旬，戴维斯见到拉马努金，而纳拉亚纳·耶尔即按弗朗西斯·斯普林爵士的指示告知戴维斯，哈代希望拉马努金能来剑桥。

但是哈代马上就知道，拉马努金不会很快来。这里还牵

涉到宗教的顾虑或者文化上的抗拒,婆罗门和遵守教规的印度教徒都是不准飘洋过海的。而且,几乎长久以来都是这样。

同时,在马德拉斯,自从 1910 年下半年拉马努金见到拉马钱德拉·拉奥以后,命运的天平也起了微妙的变化。本来拉马努金成功或失败摇摆不定,现在命运的天平则肯定地倾向拉马努金一边了。作为一个成绩无可怀疑的数学家,所缺少的就是一个有把握的评语,现在这个评语已经送来了。

2月 25 日,拉马努金的工作被送给了沃克(Gilbert Walker),他也曾得过优等第一名,做过三一学院的研究员和数学讲师,现在已 45 岁,担任位于西姆拉(Simla)的印度气象局的领头人。在接受任命时,他本没有一点气象学的背景。但是在印度,夏季暴雨的预报是如此重要,连续几年预报不准确的后果仍令人心有余悸,大家认为沃克作为一个有此等地位的职业数学家——他不久前就任皇家学会会员,或许能改变这种状况。

这时沃克恰好路过马德拉斯,弗朗西斯爵士努力说服他读一读拉马努金的笔记本。沃克第二天就写信给马德拉斯大学请他们支持拉马努金为研究生。他给大学教务长的信里说:

我所看到的这个工作之质量给我印象至深,可以相当于剑桥某学院的数学研究员。然而,可以想像得到,这些结果要想得到普遍的认可,还缺少完整性与精确性。他所研究的纯粹数学诸领域非我所长,所以对他的能力我不能作出确切的估计,而这种才能可能足以使他名扬欧洲。但是我十分清楚,贵大学有充分理由给他至少几年时间使他能全力以赴从事数学研究,而不必为生计发愁。

尽管沃克的信这样说,拉马努金的工作对于他和其他人一样,仍是完全神秘而不可理解的。沃克年轻时就对回转仪

和电磁学有兴趣。又因对飞镖 (boomerang)\* 的空气动力学研究而早有名声。当大学生时,他就喜欢在剑桥后院中丢这种飞镖。现在他是印度的首席气象学家,他最近一篇论文题为《北印度的寒冷暴风雨天气》。换言之,他现在是倾向应用的数学家,他与拉马努金的工作相距何止十万八千里。他说“非我所长”其实是过于含蓄,但他承认“对他的能力我不能作出确切的估计”确是一句大实话。

尽管如此,他仍力荐给予拉马努金一份特别的奖学金。因为现在,对拉马努金的种种赞扬都要考虑到一个新的因素:哈代。把拉马努金的工作介绍给沃克的斯普林,马德拉斯港务信托处里的每一个人,现在都知道拉马努金得到了哈代的认可。如果说沃克对拉马努金的成就还有几分怀疑,哈代的评语则已使之消除。拉马努金的生命之车,10年之久都是开开停停,现在有了哈代的认可,如同轮轴上加了油,像一部仔细调好引擎的跑车,飞驰前进了。

如果说拉马努金对于哈代的好评对其一生意味着什么还有些疑惑不定的话,沃克响亮的赞语终于在最后两天消除了这种疑惑。2月27日,拉马努金又给哈代去了一封信,信中又是塞满了定理。“我满怀感激之情细读了您1913年2月8日的来信,”他写道,“我得到了一个朋友,他充满同情地看待我的工作。”

事实上,不仅是沃克、斯普林和马德拉斯数学界的其他人因哈代的信而增强了信心。而且还有拉马努金本人。拉马努金尽管自信自己的数学能力,他还需要外界的肯定和支持。现在他得到了,哈代的信如此认真地对待他。不是这位素未

\* 澳洲土人用硬木做的一种弯曲形的飞镖,有一种掷出后能飞回原处,另一种不飞回,但会突然转向。——译者

谋面的皇家学会会员,这个有欧洲最好的纯粹数学家名声的人宣布的吗?如果是模糊空洞的赞誉之词,拉马努金在焦急的时候可以完全对它不予考虑,而哈代的信是整整9页确切的内容丰富的评论:拉马努金在第6页里说某个级数可以用 $\pi$ 和欧拉常数来表示,这可以从布罗米奇的《无穷级数论》一书中的一个定理导出(希尔在两个月前的一封信中还推荐过这本书)。同一页上还有一个关于双曲余弦函数的定理,是哈代在《数学季刊》杂志中证明过的。哈代知道这个定理。

哈代后来说过,拉马努金总是“一贯地我行我素”,这并不意味拉马努金不在乎别人怎样看他,事实上他是很在乎的。哈代在评价拉马努金的工作时,大致把它们分成三大类:第一类是那些已知的,或者容易从已知结果导出的;第二类是那些奇特的,很难的,但不一定特别重要的;第三类是如果得到了证明后,将会有重要前景的。很显然,在哈代心里,第三类的分量最重。

但是拉马努金并不如是想。

“目前我所需要的,”他给哈代写道,“是如您这样的杰出教授承认我这个人的价值。”他觉得,这个“价值”并不只是由哈代认为新颖而重要的定理所产生,甚至并不主要由第三类结果产生,而是由他归入第一类的已知结果来体现。他写道,“正是这些定理,鼓励我继续前进。因为我的结果已被证明是正确的,尽管我只有很浅的基础。”他现在可以在全世界面前宣称:有资格的权威人士已经认定我正是如我自己所宣称的那样的人。这说明外界的判断对他是多么重要,这比他曾多次离开学校更能说明这一点。

在他给哈代的第二封长信中,拉马努金看起来是意气风发,鼓足了劲,甚至过于自信。哈代不是要证明吗?好,他写道:

如果我给了您我的证明方法,我肯定您也会和那位伦敦教授[希尔]一样。但是事实上,我也没有给他什么证明,而是按照我的新理论作出如下的断言。我告诉他,按照我的理论,以下级数的无穷多项之和是  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ 。如果我告诉您这一点,您一定会说疯人院才是我的去处。我对您详谈这些只不过是为了使您信服,如果我在一封信里告诉您我的前进路线,您是无法跟上我的证法的。您可能会问,您怎能接受错误前提下的结论呢?我想告诉您的就是:检验我给您的结果,如果它与您沿着今日数学家们所走的旧车辙得到的结果一致,您至少会承认,在我的基本准则中还有一些真理。

沿着旧车辙所得到的!拉马努金在高高飞翔。他叫卖他的数学货色4年之久,使他不再羞于去索求他之所需,也不耻于自怜:“我已经是半饿死的人了”,他现在这样对哈代写道,“我需要食物来维持自己的头脑。这是我的第一位考虑。您的一封同情我的信就能帮助我从大学或者政府得到一笔奖学金。”

拉马努金用这样的语调写了整整两页,然后再堆积更多的定理,按哈代的要求把他关于素数的思想展开,再继以新的工作——总共是9张塞满了定理的纸。他写道:“如果一个级数的项数或一个乘积的因子数是分数或复数,我也能给它意义,而我已得到一些定理来准确地或近似地计算其值。从这些定理得出了许多奇怪的结果……”

后来有许多人从拉马努金的信中看到一种感人的真诚的谦逊。但是信中也开始显示出另一个拉马努金的形象,那个已经梦想在数学史上占一席之地的拉马努金。他写道:“您可能认为我太顽固,对我的证明方法保持沉默。”但是他的沉默只是因为缺少足够的篇幅把这些写出来,而不是不愿意。“不,”他继续写道,“我并不想把这些带到坟墓里去。”

谦卑吗?内维尔后来这样描述拉马努金:“仪态无懈可

击，举止淳朴，遇到困难时能听之任之，有了声望也不自矜。对他人的过失能宽容，对朋友极为忠诚。”他从未说过拉马努金谦卑。在后来讲到拉马努金的妻子佳娜琪时，也说佳娜琪从未说过拉马努金谦卑，或者不敢对自己的才能作乐观的估价。内维尔借用她的话说：“他的名字将被人们记得一百年。”这里完全没有他过分谦虚的意味。拉马努金一贯有一种固执，自信的倾向；要能在不为人知的孤独的情况下工作，只是由于他对工作的热爱，他必须这样。现在，在给哈代的第二封信中，这种倾向毫不羞怯地浮现了。

可以肯定，哈代完全没有因此而有丝毫不快。他有一次写道：“‘谦卑’的人是做不出好工作的。”

由于哈代的信的督促，工程学院的数学教授哈努曼塔·拉奥(B. Hanumantha Rao) 在3月13日请纳拉亚纳·耶尔参加数学学术委员会的会议，讨论“能为拉马努金做些什么，……您已看到的他的一些结果，比他本人更能帮助我们。”19日委员会再次聚会，并对大学的管理机构董事会议建议，给予拉马努金一笔研究奖学金，每月75卢比——是港务信托处薪水的两倍有余，为时两年。

但当董事会4月7日聚会时，拉马努金的事忽然又生了波折。这种奖学金只能授予已有硕士学位的人，而拉马努金连学士学位也没有；他进过的每一个学院都让他退了学。根据印度的一项记载，这是因为有几个英国人——以利特尔黑尔斯(Richard Littlehailes)为首，此人牛津出身，是王公学院的数学教授，后来被说服成为拉马努金的支持者之一——抓住了这一细节，“并以激烈的言词”结成一伙反对他。不管怎么说，董事会的副主席、马德拉斯高等法院的大法官森达拉姆·耶尔(P. R. Sundaram Iyer)站了起来。他问道，创立本大学的

法案之序言不是说大学的功能之一即促进研究么？且不管拉马努金学历上有何欠缺，他作为一个数学研究者的才能不是已经证明了吗？

辩论了一整天，“大学目前并无颁发此项奖学金之规定，”教务长后来写道，“但董事会根据校章第 XV 节与 1904 年印度大学法案第 3 节，允许在乔治堡总督对董事会明确表示同意的前提下颁发此项奖学金。”

可以看出，在收到哈代的信 6 个星期以后，马德拉斯的意见发生了多么大的改变：现在当权者竟然改变法律以方便拉马努金。不过拉马努金毫不知情。

4 月 12 日左右，拉马努金得到了好消息。奖学金使他能自由地做数学，听大学的课，使用大学图书馆。于是现在，如内维尔所述：“进了马德拉斯的王公学院，他的职责就是一心一意致力于数学，而在贡伯戈纳姆的 9 年中，这却是不务正业。”

### 3. “拉马努金懂波兰文吗？”

当您走出小巷来到一片开阔的地方，可以看见广阔的蓝天，有点像意大利山间小城里的广场。不过，这里既不是广场也不是公园，这里有一个大“池子”，举行宗教仪式时教徒们就在这里沐浴。这类大水潭通常是方形的，有沙底，周边有花岗岩的踏阶伸向水中，潭中心有一个人工岛，岛上有装饰华丽的宗教雕刻。

这是一个相当大的池子，每边约有 100 码（约 90 米），而且特别漂亮。传说中它的前身叫做蒂鲁·阿里·肯尼（Tiru Alli Keni），意为“圣洁莲池”，所以这个地区的名称就是其蹩脚的转音特里普利卡内（Triplicane）。紧靠着莲池有一座古老的

吠舍神庙，即帕塔莎拉蒂（Parthasarathy）庙，其主神克里希纳是《薄伽梵歌》那场大战的战车“驭手”（salathi），至今仍有帕拉瓦（Pallava）的国王于公元 792 年赐他的铭文。穆斯林、荷兰和法国士兵都在这里驻扎过，前后几个世纪。在有祭礼时，忠实信徒在此沐浴，有时仅几个人，有时则成百上千人，挤在一起，成了赤裸上身的棕色男人的海洋。

池子南边相隔一条街处有一个小巷子，称为哈努曼塔拉扬·柯依尔街（Hanumantharayan Koil Street）。走过几户人家，就在街道向左急转处，有一幢小房子，坐落在院子深处。拉马努金一家现在就住在这里，离王公学院约一英里半（约 2.4 千米）。手上有了这笔奖学金，离开港务信托处，他们就不必再住在拥挤的乔治城。大概是在 5 月份搬到这里的。

现在拉马努金惟一要做的事就是研究数学，每 3 个月交一份进展报告。每个月得 75 卢比。当初在贡伯戈纳姆时，从寄宿者收取 5 个或 10 个卢比就是一家的主要收入了。甚至在港务信托处，他也只能得到 25 或 30 卢比，可能一度得到 50 卢比；这要抚养佳娜琪、柯马拉塔马尔以及柯马拉塔马尔的母亲就很紧张了，以至他有时得去打夜工，辅导大学生以助家用。然而，现在他几乎是富裕了，每月收入将近 100 卢比，这是印度数学会会员应该交全额会费的最低收入线。现在拉马努金有了身居高位的朋友，在数学刊物上发表文章，和西方世界的第一流数学家通信往来。

每天一大早，然后是在夜里，他都与纳拉亚纳·耶尔一同工作，后者现在不是头了，而是他的同事。有时，他向住在同一条街上的统计学家马德哈瓦（K. B. Madhava）借几本数学书。经常可以在康纳马拉（Connemara）图书馆的凹壁间看到他。康纳马拉图书馆以马德拉斯一位前任总督命名。其一翼还有大学的藏书，好像一个世俗的教堂，有着高耸的装有镂花

玻璃的拱形窗子，其中处处有木雕，柱子与拱顶有许多石膏装饰。这是一座印度—撒拉逊人<sup>\*</sup>的学术之宫。拉马努金在得到奖学金免于家累后，常忘情于此度过愉悦时光。

这有点像他婚前的日子，他可以更专心地投身数学了，日常琐事全都交付他人。佳娜琪后来回忆道，有时“他让妈妈或祖母半夜唤醒他，以便在静寂凉爽的下半夜工作”。有时“要人招呼才去吃饭……祖母或者妈妈把米饭拌着浓香的小扁豆汤和 *rasam* 或酥酪，三天两头变个花样。她们常常是直接送到他手上，以免打断他的思路”。还有时，佳娜琪或者妈妈按他喜欢的办法做茄子，这是一种梨状的茄子，也就有梨子那么大，通常是吃熟的。但拉马努金喜欢吃母亲专门为他做的那种——把一个茄子切成连在一起的八瓣，放在罗望子果酸和 *masala*<sup>\*\*</sup> 中渍泡一小时左右，然后生吃。

现在拉马努金在楼上有了一间书房。他和佳娜琪通常在不同的时间睡觉。她回忆道：“几乎每当我醒来时，他总在工作。”笔尖划在石板上的声音整个房子都听得见。有时兴之所至，他会搞一个小科学实验和她玩：用一罐水和几根管子做一个虹吸管，告诉她重力是怎样把水引向低处的。但除此以外，两人接触不多。佳娜琪才 14 岁。他陶醉在纯数学的王国中，而她除了最简单的泰米尔文以外完全没有受过教育。有时他要小憩片刻，就请她待会儿提醒他，“去做你刚才在楼下做的事”，“去做吃饭前做的事”。但在动脑筋的事上，他们毫无相通之处。他也从不教她什么，她既不求他教，他也不想教。

\* 撒拉逊人(Saracen)是希腊人和罗马人对十字军东征时期的伊斯兰教徒的称呼。——译者

\*\* 印度食品，未详，谨照录原文。后同。——译者

在这段时期，拉马努金和哈代似乎在互相兜圈子，彼此弄不清楚对方。在他们的信件来往中，哈代总在为自己在英国掀起的数学革命辩解，想从拉马努金身上榨出严格的证明来。拉马努金则以种种借口作为回应。至少拉马努金的态度可以看成是如此。而到了3月中，好像是真的吵起来了。“在此情况下他[拉马努金]的信简直是疯了。”李特尔伍德给哈代的信中这样说，“我甚至怀疑他是怕您偷窃了他的工作。”哈代在给拉马努金的下一封信中提起此事，他竭力劝说拉马努金：

我对您明说吧，您手上已有我三封长信[拉马努金只有两封]，在这些信中我清楚说明了哪一些事实上您已能证明，哪一些您宣称可以证明。我已将您的信给李特尔伍德先生、巴恩斯博士、贝里(Berry)先生和另一些数学家看了。肯定已很明显，若我有不正之心想利用您的结果，您很容易揭露此事。我肯定，您会原谅我的冒昧，若我不是真正急于知道您能做什么，以便给您提供机会，尽展您那显见的数学才能，我是不会这样做的。

不论哈代与李特尔伍德是否误解了拉马努金的信，拉马努金竭力否认自己有此顾虑，而且成功地使人感到他受了委屈。“对您按李特尔伍德先生的意见所写的话，我略感不安，”他在4月中旬的信里这样写道：

我完全不担心别人会利用我的方法，恰好相反，仅我自己能掌握这个方法已8年之久，我没有发现任何人能领会这个方法。正如我上一封信写的，我以您为知己，我愿无保留地谨奉上我的微薄成就供您使用。

拉马努金作为特殊的研究生，作为剑桥之友，成了马德拉斯人们的热门话题。人们成群登门，以示敬意。8月份，他的名字出现在一次师生聚会上，有一个参加者说，对于他“没有书籍和教师之助”而取得如此的学术成就，人人无不叹服。

9月，纳拉亚纳·耶尔把几个关于级数求和的定理递交

《印度数学会杂志》去发表，文中加了一句：“下面的定理属于马德拉斯大学数学研究生拉马努金先生。”

10月26日，可能是为了争取一个原来反对给拉马努金奖奖学金的人，纳拉亚纳·耶尔带了拉马努金去见利特尔黑尔斯，因为拉马努金从不善于阐述自己的方法，故由耶尔来讲。利特尔黑尔斯向他们保证，12月1日以后他将去读拉马努金的结果。

11月的一天，马德拉斯基督学院的数学家罗斯(E. B. Ross)冲进教室，拉马努金几年前见过此人。这天他两眼发亮，问学生道：“拉马努金懂波兰文吗？”当然不懂。原来是拉马努金最近一次的季度报告比一位波兰数学家的工作早一步发表，而那个波兰数学家的论文恰好于当天邮寄到。

作为一个研究奖学金获得者，拉马努金惟一的义务是每3个月交一份报告，详述他的进展。其中3篇，他都按时发表于1913年末和1914年初。和他的许多工作一样，他讲的定理都来自他的笔记本，有的可追溯到第一个笔记本的第180页，有些出自第二本的第3章和第4章。大部分讲的都是定积分的计算。

他在1913年8月5日提交给数学学术委员会的第一个报告中写道：“现在有许多定积分，我们虽知其值为有限，但无法用现在已知的方法算出。”而他提出的定理——后来称为“拉马努金主定理”——可以给出计算许多积分的方法。在报告正文前作为引言的一封信中，他说：“本文可以视为我由此定理得出的结果之连载的第一篇。”他许诺更多的结果很快就会出来，果然，这些结果出现在第二和第三个报告中。

那年早些时候，拉马努金在给哈代的信中说，他在研究一些迄今无法化简的定积分，用尽了数学的十八般武艺也无法把它们化为更有用的形式。拉马努金正在创造新的数学

工具。

数学工具,就像螺丝起子、锯子、车床一样是能用来制作东西的;那些用来估计定积分的工具,就是让它们用在定积分上,希望一个工具用过了再用另一个工具——即另一个定理或另一种技巧——一直到算出来为止。但是正如螺丝起子能用来紧螺丝而不能锯木头一样,有些数学工具能用来计算一个积分,但用于计算另外的就不行。如果您事先不知道行不行,那就得试,这一样不行就换另一样。

有一种工具,显然是拉马努金在一本 1896 年的积分教本上看到的,就是弗鲁拉尼 (Frullani) 积分定理。现在,到了 1913 年,拉马努金给出了它的一个强有力的推广,可以攻下很大一类原来解决不了的积分。要应用弗鲁拉尼积分定理,应先要求两个函数相等;拉马努金的推广则不需要,这样就可以把它的应用范围扩大到许多情况。其实,哈代早在 1902 年就写过一篇关于弗鲁拉尼积分的论文。但是他在这个积分中从未看出拉马努金现在看出的东西。

这时,拉马努金对他的许多结果给出了证明,但后来许多分析学家发现这些证明漏洞百出。然而这些结果——即拉马努金给出的结果——本身却是对的。一位研究拉马努金的美国学者伯恩特 (Bruce Berndt) 却从方法与结果的分裂中为今日的数学家看出了一个信息:“我们可以允许我们的思想有时摆脱严格性的锁链,”他这样建议道,“思想一旦自由了,就会找到穿过树林的新路。”

#### 4. 纳马卡尔之梦

这段时期拉马努金的生活是甜美的,但是他与哈代的远程通信却是苦涩的。8 月份,在他第一份季度报告的卷首信

中,他就像一本书的作者引用对其有利的评论那样引用哈代对他的评价:“本文例(v)注第5节所讨论的积分,剑桥三一学院的理学硕士、(皇家学会会员)哈代先生认为是‘新的,有意义的’。”其实那时,他们已很少书信来往了。可能是由于早前通信带来的苦涩,或者是哈代对他不去英国不高兴。物质与文化的鸿沟太大了,靠通信来跨越是会遭到挫折的。或者只是因为其他的事太多。不管怎么说,这段时间里拉马努金至少写了一封信,而哈代则好几个月没回信。

然而在1914年1月初,拉马努金终于又收到哈代的一封长信,回复他早先提出的一个证明,指出它的毛病,表明这些毛病会使他走入歧途。“您会看到,证明中既有许多漏洞,难怪结果是错的。”哈代小心翼翼,如履薄冰,继续说,“我希望您不至于因我的批评而丧气。我想,您的论证是很出色、很聪明的。如能把您认为已经证出的结果真正证出来,将是整个数学史上最辉煌的功绩。”

哦,还有一件事,他似乎全不经意地加了一句:“试一试与内维尔先生接触,现在他正在马德拉斯讲学。他和我是同一学院的,您会发觉,他关于读书和研究的建议极有价值。”

这不是谎话,但也没把真话说全。哈代心里想的比为拉马努金找几本好书更深了一层。他要让内维尔作实现他的计划的工具,他拜托内维尔把拉马努金带到英国来。

当然,他一开始就有这个想法。正如斯诺说的:“一旦哈代下了决心,人间谁也不能阻止拉马努金来到英国。”甚至在写信给拉马努金之前,他就为此与印度文职人员联系过。但那时,来自马德拉斯的回音是:由于宗教的原因,拉马努金无意前往。

拉马努金对这件事的讲法,可以从他一年后给哈代的信上看到。他于1913年2月得到马德拉斯印度学生咨询委员

会秘书阿瑟·戴维斯的一封信，问拉马努金可否次日去他办公室见面？弗朗西斯爵士并请拉马努金的“上级”——这肯定是纳拉亚纳·耶尔——陪同前去，并回答问题。

戴维斯第二天就提出了这个大问题：拉马努金是否准备去英国？

拉马努金心荡神驰。这个建议是什么意思？去英国学数学吗？去英国参加考试必败无疑，这将会……？

他还没有来得及回答，纳拉亚纳·耶尔——拉马努金说他是“一个非常正统的婆罗门，对于到外国去总感到良心不安”——马上就说不行，拉马努金当然不能到英国去。以后，按拉马努金的说法，“事情就了结了”。

至少这是拉马努金后来对事情经过的说法。但几乎可以肯定，这是他为保全面子编出来的推诿之词。其实，他不肯去的原因是婆罗门“到外国去总感到良心不安”，但不是纳拉亚纳的良心不安，而是拉马努金的朋友、家人和他自己的良心不安。

有记载描述 18 世纪早期南印度人对一个去过欧洲的同种姓者的蔑视态度说：“他的种姓中的人们总躲着他，因为他背叛了自己的种姓，在他们看来，他已无异于一个死人。”这个人在外国时，得到了种种荣誉，得到了圣米伽勒勋章骑士称号，但是一回到印度，这些全无价值了，人们都蔑视他。好几代人以后，另一个印度人拉马克里希纳(T. Ramakrishna) 问他的母亲准不准他去英国读书，据说得到的是警告。拉马克里希纳一直等到母亲去世以后才敢成行。

对于一个正统的印度教徒——拉马努金正是出身于一个很正统的印度教家族——欧美之行表示一种玷污。其严重有如公开地抛弃圣巾、吃牛肉或与寡妇结婚。传统上，出了这种

事后果严重,甚至要逐出种姓。那意味着您的亲戚朋友会不准你上门,子女找不到亲家,已嫁的女儿不准来看你,否则她也会被逐出教门;有时会禁止您进庙宇;家人死了,同种姓的人也不会来祭奠。这就是逐出种姓所包含的无情而又习以为常的意义。

比拉马努金还早四分之一个世纪,圣雄甘地想到英国去求学就遇见过类似情况。“您想违反教规吗?”甘地的族长就这样问他。他确实这样做了,因此被宣布逐出种姓。到拉马努金时代,因出国而良心不安已经减轻了一些,但是除了最勇敢的人,这仍然是一个禁忌。

不管他多么向往英国,拉马努金在马德拉斯传统的掌握之下得不到一点松动。马德拉斯不是石油催肥了的休斯顿,不是铁路喂富了的芝加哥,这些地方人们野心勃勃,生活就是梦想。马德拉斯的居民是死水一潭,几十年一成不变。它是平平的一片,建筑低矮,平展展一直连接着乡村。它没有喜马拉雅山的高峰引起人们向上的想像力,也没有高塔作为人类抱负的象征。比之印度的其他大城市,马德拉斯更墨守农村与周围乡村的精神。加尔各答与孟买挤满了来自全印度的未婚工人,具有一种粗野的、男性的,类似开发美国西部的冲动力。但马德拉斯社会比较平静,他们聚居于特里普利卡内的帕塔莎拉蒂庙附近,他们就住在拉马努金四周——都是正统的婆罗门,像他的母亲那样,支持传统,鼓励恭顺,在他的身边,社会秩序把一切都紧紧地束缚着。

拉马努金决无反叛精神。即使他对于出国的禁忌有所动摇,他也不会说出来,更不会自己去违反它。要他到英国,必须有强大的外力推动,需要他所尊重的外来的声音批准。

哈代的使者内维尔于 1914 年元旦到达马德拉斯。

哈代后来对内维尔的评价是：一个能干的数学家，“但是从未做出什么激起人们热情的工作。我希望他能够做出来，但他是另一种人，而如李特尔伍德则任凭谁都会说他的工作一定是好的”。哈代这样说内维尔当然也可以，因为内维尔已经是一个重要的青年数学家。他才 25 岁，是在哈代的改革确立前一年，最后一批参加老式 *Tripos* 的人。他想成为最后一位优等第一名，但是只考了第二名。两年后，1911 年，内维尔得到史密斯奖，又一年，成为三一学院研究助教。现在，1913 年冬，他来到马德拉斯大学就微分几何作一系列讲座。

当然，他还有另一项任务，即说服拉马努金去英国。

就是在 1 月初，两人在马里纳海滩（Marina Beach）对面的学校评议会行政楼——也是该大学的考场与办公室——见了面。从外表看，这座大楼是一个奢侈的、兼有意大利、拜占廷和印度—撒拉逊风格的建筑，满是圆形花窗、清真寺的光塔、栏杆和凿出的石柱。在里面，则不只是一个宏大的空间——大厅可以容纳 1600 人，有一个高达 45 英尺（约 14 米）的穹顶，彩绘玻璃窗，堪与外表的装饰比美。内维尔下个月内得做 21 次讲演，吸引了来自整个南印度的数学家。

第一次讲演后，人们给他介绍了拉马努金。他可不是“拉马钱德拉·拉奥那种笨拙的、胡子拉碴的邋遢相，”内维尔后来这样写道，“而是一个略有怯意而又急切的人。”至于拉马努金的英语，他本来曾因英语太差而断送了学校生涯，“这十年苦读却造成了奇迹，我很少见到语言如此流利而且词藻更丰富贴切的人。”

他们至少有三次同坐在拉马努金的笔记本前。内维尔大为吃惊，以至第三次见面后，拉马努金问他是否愿意把笔记本拿去闲时细读，内维尔真是感到“受宠若惊，这本笔记实是无价之宝，[内维尔以为]他从未让这笔记本离开自己身边：没有

一个印度人懂得它,没有一个英国人值得托付保管它”。

内维尔后来想,拉马努金对他在马德拉斯见过的英国人都过于不敢信任。说不定对哈代也错误地不敢信任。毕竟他们是远隔重洋只靠鸿雁传书。但他内维尔却是素昧平生的远来新交,作为一个纯粹数学家,自然对拉马努金的数学情投意合。两人年纪相差不过一岁,拉马努金却如此慷慨地将一生心血的笔记本交托达三日之久——内维尔已得到了拉马努金的信任。

这时,内维尔开始执行哈代的托付了:问拉马努金是否愿意去剑桥?他原以为拉马努金会有否定的反应,所以安静地准备自己的说词,岂料全无必要。“我又惊又喜,”他后来写道,原来“拉马努金不需背叛教门,他的父母已不再反对了”。

是什么奇迹促成了这种变化呢?

一种说法是归功于 K·纳拉辛哈·耶恩伽尔,他是拉马努金家的朋友。早在 1911 年,拉马努金在马德拉斯时就与他在一起,而且以后也时有来往。他帮助说服拉马努金的母亲允许他成行,她是起关键作用的反对者。塞舒·耶尔也对她做了工作,V·拉马斯瓦米·耶尔和拉马钱德拉·拉奥则做拉马努金的工作。班加罗尔的数学家 M·T·纳拉亚纳·耶恩伽尔也做了工作,此人是《印度数学会杂志》的编委,曾与拉马努金密切合作 3 年,使他的第一篇论文得以发表;此人又是一个十分审慎的正统派,他的言论就更有分量了。

但是如果说这些影响起了决定性作用,却并不全对。使拉马努金最终下定决心的还需要其他因素——至少要让公众理解,并不是他的母亲或拉马努金的个人愿望就可以算数的。内维尔知道的情况是:“他的母亲在一个梦中栩栩如生地看见 [拉马努金] 置身于欧洲人中,女神娜玛吉利命令她再不要妨

碍她的儿子完成自己的人生使命。”种种说法细节虽然不一，大体却是一致的——允许拉马努金成行确实是身居纳马卡尔神庙的女神娜玛吉利亲示的谕旨。

在贡伯戈纳姆以西 80 英里(约 128 千米)处的纳马卡尔附近，群山猛然拔地而起，还可以看见棕榈树和香蕉，还有稻田。但比之高韦里河两岸，植物显著地稀疏了，土坯和砖造的小房子也让位于东部不多见的石屋，石头取自四周群山和田里冒出的石丘。

有一座石丘远较其他的引人注目，它陡立 200 英尺(约 60 米)，周围约半英里(约 800 米)，小城纳马卡尔就位于它的白色峭壁下，并以此巨石得名。这个小城居民约 7000 人，离最近的火车站约有 20 英里[约 32 千米，火车站在卡尔鲁尔(Kar-lur)，拉马努金的母亲和外祖父母均来自此地]。巨岩上满是小小的神龛，当地人称为 *jonaīs*，其实它们不过是亘古以来植根于岩缝的树木和雨水侵蚀而成的洞穴和裂缝。在这巨大的石丘顶上有一个古堡，用 3 英尺(约 91 厘米)厚的砖砌的雉堞保护着。一条沿着西南坡开辟出来的窄窄的阶梯与之相通。在人们看来，这个巨石在天空中划出了笔直的一竖，象征着吠舍种姓标记纳马(*naman*)：一根笔直的白色的竖条。纳马卡尔一词即由此而来。

1913 年 12 月末，拉马努金、他的母亲、纳拉亚纳·耶尔及其儿子出发来此。佳娜琪也想来，但是拉马努金说她还太年轻。他们在塞勒姆(Salem)下了车，这是一个有 7 万人口的城市，位于风景如画的谷地之中，群山环抱。他们在这里住在 V·拉马斯瓦米·耶尔家中，此人是印度数学会的代理召集人，又是其创办者。拉马努金在这里给贡伯戈纳姆家里写了信，然后和纳拉亚纳·耶尔离开他人径去纳马卡尔，这段路乘的可

能是牛车。

在纳马卡尔，他们转上一条蜿蜒小路，路边都是小房子，缓缓上行，来到城中。不久就看到巨石脚下石柱的正面和巨大的木门，这就是那罗希摩大神的庙。他是毗湿奴的第四化身，有着狮子的面孔，左方一个较小有石柱的单独神庙，供奉他的妻子娜玛吉利女神。

并不是只有拉马努金一家特别信奉女神的法力。一周中有几天，总有些狂热、激动的女人来此朝拜，祓除妖魔。有一篇文章说，这庙里充满了尖叫和惊厥，一直到祭司在她们头上洒圣水才安静下来。满头大汗的祭司们就在这十分拥挤的通道里做法事，空气中充满了香烟，把墙都熏黑了。

连着三个晚上，拉马努金和纳拉亚纳·耶尔都睡在庙里地上，坐在那里的石板地上，向上看只能看见巨石的岩面，那巨石就充当寺庙后墙，顶上则可以看见那古老堡垒的贝壳形雉堞的轮廓映在天空中。头两晚都平安无事，但到了第三夜，拉马努金唤醒了纳拉亚纳·耶尔，说他梦到一道明亮的闪光或者是类似的启示，得到女神的旨意，说他可以不必理会反对出国的禁令。

纳拉亚纳·耶尔的家人至今仍相信，耶尔对拉马努金的心灵有人微的体察，又考虑到对女神娜玛吉利的虔信，才安排了纳马卡尔之行。拉马努金对女神的信奉和去英国的愿望都是如此强烈，所以上面这件事是必定会发生的；而一旦发生了，纳拉亚纳·耶尔自忖，有他在场见证就能“正确地”解释拉马努金得到的启示。

当拉马努金躺在纳马卡尔神庙的地面上时，是否由于他的热切心情而使娜玛吉利的像确实显现？或者如内维尔所听说，是他母亲做的梦，她强烈地服从梦中带来的信息使事情定了案？或者是他和母亲都梦见了娜玛吉利？还是拉马努金比

过去更热望去英国，在家里拖延了将近一年后，他在寻找一个社会上能够接受的办法？

拉马努金肯定地总是把自己的决定归因于神示。有点像法国的圣女贞德所说：“我把自己锁在小阁楼里一天一夜，上帝告诉我，我要成为天国的将军、率领法国军队赶走英国人。”到1913年2月，印度文职人员所知道的还是：拉马努金拒绝去英国；而到12月，他去了纳马卡尔；一两周以后，与内维尔见了面，说自己愿意启程去英国，使内维尔大吃一惊。1月22日拉马努金又写信给哈代，“期盼”他和李特尔伍德“尽力助我赴英”。他字迹潦草地还写道：“希望几个月内成行。”

拉马努金在信中设法回避这样一点：即在剑桥看来，这一年来他似乎顽固地不肯去英国。拉马努金写道：“现在我从您的来信和从内维尔处得知，您很希望我能来剑桥。”好像他是第一次听到哈代要他去英国似的：“如果您早些给我信，我早已坦陈我的想法了。”他说在与戴维斯会面后，认为他是必须听从“上司”安排的无足轻重的小卒，为什么不提他以前的信上讲的话，也是由于他的上司的原故，至于他和他的家人在宗教上感到的不安，以及他的纳马卡尔之行，拉马努金则只字未提。

这一切安排可能都是出于纳拉亚纳·耶尔，至少也是两人商量后才行事的。不管怎么说，拉马努金有意曲解事实以解自己之窘，这并非惟一的一次。1914年初，在赴英国之前，他又回到贡伯戈纳姆，告诉他的朋友安南塔拉曼(Anantharaman)和苏布拉马尼安的家人说，他将要走了。但他说是到加尔各答去。有些情况下说假话也情有可原；当朋友们的父亲得知真相后，深惧拉马努金的榜样会引诱他们的孩子也到英国去，这位父亲还专程去马德拉斯劝拉马努金别去英国。

关键性的障碍已除，内维尔就着手来解除拉马努金的其

他顾虑。路费和生活费怎么办？不必操心，内维尔对他说，都已准备好了。他的英语不太好怎么办？内维尔说，够好的了。吃素问题呢？会尊重这一点。还有考试？他在大学基本上每次考试都不及格，想到考试就害怕——而他知道，应考是在欧洲的印度学生不可避免的命运。内维尔让他安心说，他不需参加任何考试。

为了去英国，拉马努金还要应付许多反对意见。例如他的岳父就奇怪为什么不能在印度学数学。他的母亲怕他因挑食而使身体不适应英国的寒冷；担心他一直吃素，找不到好的印度食品；怕他还可能受当地人的歧视，而另一方面，又怕英国女孩子缠住他。（在他走以前，有些英国妇女来见这位即将去剑桥的神秘天才，和他握了手，这使他的母亲大为生气。）

同时，拉马努金有些朋友把这次远行看成是——用内维尔的话说——“把本属于马德拉斯的光荣偷送给英国大学的一种卑鄙手腕”。内维尔不敢贸然行事，也只好设法安慰他们。“为了不使拉马努金因这些朋友的劝阻而为难，我就自己挑起说服这些印度朋友的担子，说这个建议全是为了拉马努金好，而且事实上是把他扶上他们都希望他达到的顶峰地位的惟一办法。”

下一步，内维尔就写信给哈代说现在该解决拉马努金去英国的经费问题了。他，内维尔本人，想在马德拉斯试试能否找到钱。如果不行，则如他在信中后文说的那样，“得想法从英国找钱……决不能让经费的困难挡路”。

哈代显然把这封信给了印度文职人员，因为他不久就得到处理印度学生事务的秘书马利特的令人烦恼的回信（此人一年前就转达过拉马努金谢绝来英国）。信中说：“内维尔先生的来信使我很吃惊，看来他在拉马努金赴英后的费用来源尚无确实把握前就鼓励拉马努金成行。”他见到这样的事太多

了,印度学生来到英国以后没有足够的钱,得到的只有“失望与不幸”。

马利特以极为生硬的言词对哈代说,“印度文职人员是一分钱也没有”。他还怀疑三一学院和剑桥是否有钱,马德拉斯也一样,他不抱希望。他的悲观也传染给了哈代。哈代给内维尔写信,多少有点气急败坏:“急复您信,盼能赶上邮班,并警告您要多加小心。”一定要找到钱,否则拉马努金就不能来。他和李特尔伍德每年可以共同拿出 50 英镑,计划让拉马努金访问两年——“请勿告知[拉马努金]本人”。但是这笔钱只够五分之一。

内维尔可能是受到哈代或印度文职人员信件的影响(后一封信并未保存下来),后来把哈代的考虑看成一种心理上的胆怯而不是经费上的担心,是对拉马努金的真正才能究竟如何忐忑不安。他这样转述(或许是误解或误传)哈代转给他的印度文职人员的来信:“这种未为人知的天才我们过去也听说过,他们弄得在印度的朋友目眩,等把他们带到英国,我们就看到,他们只不过是早慧的小学生;几个星期以后,他们就不行了,我们的善行实是弊多利少。”内维尔嘲笑哈代的胆怯,其实这是他以为哈代如此。他这样做,是觉得他敢于担保:“我看过了拉马努金的笔记本,和他谈过话,而哈代则没有这样做过。”

不管怎么说,内维尔在收到哈代的信之前,对钱的事已有了把握。利特尔黑尔斯给他介绍了一些在大学和政府中有影响的人,而他则到处宣传拉马努金。在 1 月 28 日致大学教务长迪尤斯伯里(Francis Dewsbury) 的信里,他说:“在马德拉斯发现拉马努金的天才,可能是我们时代数学界最有意义的事。”这是一封深思熟虑而庄重的信,其目的只有一个——资助拉马努金去英国。“我看不出有理由怀疑,”信的结尾

如下：

拉马努金本人因与西方第一流数学家的接触而受到的激励，必有充分的反响。这样，他的名字将成为数学史上最伟大的名字之一，马德拉斯大学和城市将因助他由默默无闻到大名鼎鼎而骄傲。

利特尔黑尔斯第二天就接过手来，正式请求迪尤斯伯里给他每年 250 英镑奖学金，外加 100 英镑置装费和路费。利特尔黑尔斯写道：“拉马努金是一个具有最出色数学才能的人，够得上是一个天才，隐于马德拉斯而前程未可限量。”

第二周，马德拉斯总督彭特兰勋爵 (Lord Pentland) 也成为马德拉斯官场中的进攻对象，当然是以拉马努金的名义。弗朗西斯爵士给彭特兰的私人秘书科特雷尔 (C. B. Cotterell) 写了一封信，信中说：

我急于让勋爵大人关心一件事，此事几天内将呈到大人处——在目前情况下，我以为此事甚为急迫，它关系到我办公室一位名为拉马努金的职员，我相信勋爵大人曾听我说过此人，据极权威的数学家宣称，此人是一位新出现的、极高的甚至超凡的天才。

斯普林(即弗朗西斯爵士)刚得知大学已准备匀出 1 万卢比，约相当 600 多英镑，足够在英国两年之需，但需上司首肯。对此，他说：“勋爵大人或可作出有益的干预。”

有人说彭特兰勋爵是“历来被派到印度来的人品最好，头脑也决非最差的人”。他本名玻恩·约翰·辛克莱 (Born John Sinclair)，个子小小的，有一副大胡子，毕业于“英国的西点”桑赫斯特 (Sandhurst) 军校，曾在皇家爱尔兰长矛骑兵团 (Royal Irish Lancers) 服役 8 年。后来转入政界，不久前在后来任首相的劳合·乔治 (David Lloyd George)\* 手下任苏格兰秘书。前年

\* 劳合·乔治，1916~1922 年任英国首相。——译者

10月才到马德拉斯任圣乔治堡总督,统辖4000万人。有一个认识他的人说,他相信国家的功能在于“确保其一切成员得到全面发展其人格的可能获得的最佳条件”。现在,在拉马努金的情况下,彭特兰的想法有兑现的机会了。

其实他已经为拉马努金详细考虑过一次了。就在上一年,他批准了拉马努金的特殊研究奖学金。现在他已准备再次作出“有益的干预”。他的秘书回信给内维尔说:“勋爵大人真心同情您请大学资助拉马努金去剑桥作研究的愿望,并愿尽可能予以协助。”

奖学金批准了,最后的障碍已经消除,拉马努金即将去英国。

## 5. 在码头上

1914年2月26日,宾尼公司(Binny & Co.)给拉马努金寄来一张二等舱船票。

3月11日,弗朗西斯爵士写信给船务代理人,盼能保证拉马努金沿途有素食。

3月14日,拉马努金陪妻子和母亲来到马德拉斯爱格摩尔火车站。窄小的候车室两侧有成排的拱柱。他们在这里候车。10年前,他就是到达这个车站开始在帕协阿帕学院学习的。现在,他哭了。他要把家人送回贡伯戈纳姆去,他不愿让家人看见他变成一个欧洲绅士时的痛苦。

佳娜琪,有一天当她的婆婆在庙里时,曾要求他携她同行。拉马努金向她解释说,如果要照顾她,就不免分心而不能专心致志地研究数学;再说,她又如此年轻貌美,只要他转过身去,那些英国人就会在她周围纠缠……

那些在最后几天陪同拉马努金忙碌的人,回忆起来都未

见到他有振奋、希望或欢乐的心情。“他对自己未来的旅途并不是欢天喜地，”拉马钱德拉·拉奥后来回忆道，“他似乎是按照一种召唤[在行动]。”

朋友们教给他西方的生活习惯，拉马钱德拉·拉奥对他这位年轻的被保护人怀有长者的关心，令他剪掉脑后那束发结。于是头发剪了；其次，拉马努金必须穿西式服装；于是利特尔黑尔斯骑上摩托，带着他，跑遍全城去买衬领、领带、袜子、鞋子还有衬衣。

拉马努金呆在乡下好几天，住在拉奥的一个过西式生活的朋友家里，学用刀叉——他的保护人“严令只给他素食”。但是哪怕这种异乡的生活方式只是试验一下，拉马努金仍很不高兴，“他不喜欢吃陌生的仆人送上的食物”。

拉马努金担心，自己在英国怎能保持吃素。他不喜欢西方发式，不得不穿西方衣服，他简直是可怜。他在临走前一天，带了一个大箱子来到王公学院教师的公用房间，打开箱子，把买来的西式服装全都拿出来放在桌上。他问，这些衣服怎能穿得出去？打领带使他不知所措，把大家都逗笑了。拉马努金想说几句笑话，但现在是学院职员的贡伯戈纳姆老朋友拉古纳坦觉得他看上去很不舒服。后来，当他的母亲收到他从英国寄回来的照片时，简直认不出来了：他整个人似乎硬塞在衣领、领带和外套里面。

那天晚上，纳拉辛哈·耶恩伽尔和他的表弟请拉马努金去住在特里普利卡内的家里。外面街道上处处是牛车，彩绘的牛角上铃声叮当，男人裸着上身，包着围腰布，女人穿着莎丽，鼻环和手镯在黝黑的皮肤上闪亮。空气中充满烧牛粪的刺鼻气味。对于拉马努金，这就是他所熟悉的一切。英国是什么样？到了那里会发生些什么？他的朋友与他聚谈通宵，想使他的忐忑之心平静下来，准备伟大的冒险。

3月15日,英印海运公司(British India Lines)的轮船“内瓦萨号”(S. S. Nevasa)从港口新建的北入口到达马德拉斯。码头是在弗朗西斯爵士任期内建的,大多数船只都下锚停泊在防波堤内,然后把货物搬到小船上,再送上岸。在港口南端专门建了一个供乘客、军队和马匹上下船的趸船,有一条用木板做的上下船通道,一条小小的木跳板由防波堤通向码头,“内瓦萨号”就停在这里。

“内瓦萨号”是一艘崭新的、专门设计用于跑印度航线的船。它的船壳漆成黑色,有一些红点,一条细细的白带从船头一直画到船尾。它看来漂亮,自有其优雅之处,单个烟囱立在中央,略微倾斜。

离国的早上,为拉马努金举行正式的送行仪式。这是由检察长斯里尼瓦萨·耶恩伽尔(Srinivasa Iyengar)组织的。参加者有米德尔马斯特教授、弗朗西斯·斯普林爵士,一些知名的法官,还有《印度教徒报》的发行者卡斯图里兰伽尔·耶恩伽尔(Kasturirangar Iyengar)。纳拉亚纳·耶尔也来了,他多年来与拉马努金密切合作,他们的石笔在石板上的擦划声曾吵得全屋子的人整夜难眠。他的儿子苏巴纳拉亚南(N. Subbanarayanan)多年后还记录了一件事:“我的父亲对他有一个特别的请求,交换他们的石板以得到灵感。”

拉马努金被逐一介绍给每个人。马德拉斯的公共教育局长斯通(J. H. Stone)祝他一路顺利,并告诉他已给英国朋友们去信,请他们多多关照。在旅客中,拉马努金遇见一位去南安普敦的救世军教徒,还有一位乔里-穆图(Chowry-Muthu)医生,后者是一位结核病专家。他还见了船长,船长开玩笑说,只要拉马努金不用数学来找他的麻烦,他们的旅途一定会过得很好。

对绝大多数人,这是一个心情愉快,开开玩笑的好时光,

但对拉马努金则不然。一位朋友回忆道，当时他“泪流满面”。

终于，再没有什么事了，拉马努金上了船，送行的人留了下来。1914年3月17日上午10点左右，“内瓦萨号”慢慢地离开了码头。

## 第六章 拉马努金的春天 (1914~1916)

### 1. 走出印度

“内瓦萨号”的油漆仍然闪着光。一年前格拉斯哥船厂把它交给船东，开始它到东方的处女航。它排水量 9000 吨，是英印海运公司船队中排水量最大的船。4 个宽敞的甲板，通风而且舒适。它是专为在热带航行设计的。然而拉马努金第一次航海旅行，在船上毫不舒适，翻腾的大海使他晕船吃不下饭。

船第一站停靠锡兰首都科伦坡，他们在那里休息了两天。锡兰是印度东南海上最大的岛，“内瓦萨号”靠岸前好久，旅客就闻到了岸上肉桂园林发出的香味。越过码头和城里的房屋，可以看到远处高耸的蓝色山影。城里的房子都有红色的屋顶和闪光的白墙。

3 月 19 日，“内瓦萨号”又离港前行，向南绕过次大陆顶端的科摩林角，再行驶一周穿过阿拉伯海直到亚丁。拉马努金这时已不再晕船，旅行变得比较快活了，船上 200 多名旅客他已认识了好几个。有人说，他有时躲在他的二等舱房里，用舱房大小的尺寸数和旅客人数做数字游戏。只是他的外套和衬衣领总让他感到不舒服。

拉马努金并不是一个沉溺于内省的人——按哈代的说法，“他并不特别考虑自己的际遇，分析自己的心理”。然而现

在，“内瓦萨号”以 14 海里（约 26 千米）的时速一天又一天行驶在一望无际的大海上，新鲜的海风拂过甲板；拉马努金不由得思绪万千，往事如潮涌上心头。

5 年前，他还是孤独地呆在贡伯戈纳姆的家里，没人知道他，没有结婚，还不是成年男子汉；而现在，马德拉斯的精英们来为他去英国送行。

那时，他是贡伯戈纳姆政府学院的留级生；可现在，他正前往剑桥三一学院。

那时，花上 3 个卢比买火车票去马德拉斯，对于他就不是小数了；现在，乘这样的大邮船去英国 400 卢比的票价却不需要他操心。

那时，要违反不能出海的禁忌，他想都不敢想；现在，许多有影响的人，其中不乏正统的婆罗门，都极力鼓动他打破禁令。

这种变化是什么造成的？很清楚，他不是一夜之间就成了一位好数学家，变化在于他是硬挤到世界上的。他的母亲注定了他的婚姻，为了生计，他走出自家的门而进入一个数学家的大门。靠着他的坚忍不拔，再加上运气，终于一步一步走出来了。

未来会是什么样——难道可以想像他从未考虑过吗？对于未知的命运之数他有些模糊的害怕。他的不安可能是在一些比较实际的事情上。在这以前，甚至包括他急急忙忙地逃往维沙卡帕特南在内，他一步也没有离开过南印度。那里，千人中白皮肤的英国人还不到一个；很快，到了英国以后，他就要为众目所瞩；他的面孔与众不同，他的口音听起来会让人感到奇怪。未来就意味着内维尔、哈代、李特尔伍德，剑桥和三一学院。只有内维尔他算是见过其人；哈代只是几封信，其余的则只是一些抽象神秘的名称。

离开科伦坡继续航行了 2000 多英里(至少 3200 千米),“内瓦萨号”到了红海最南端的亚丁港。从这里将开始的一段旅程,至少许多英国人是视为畏途的——这就是穿过红海的 1400 英里(约 2600 千米)的航程。这段路上,船每天都在沙漠似的炎热中炙烤,温度是 100°F(约 38°C)左右。如果从印度出发,您的舱位又在右舷,每天下午西晒,到了晚上,舱房里烤得要冒烟;而左舷的房间,整个下午会变得凉爽。反之,如果是从英国回印度,则正相反。所以,贵宾们都要订一个凉爽的房间。这样就在英语中造出了一个新词 POSH,即“Port Outward—Starboard Homeward”(出发坐左舷,回家坐右舷)的缩写。

或许是厌倦于长途航行,或许是由于即将进入地中海而兴奋,拉马努金变得想倾诉自己。“内瓦萨号”从苏伊士港进入运河,到达运河北端的出口塞得港(Port Said)时,离开马德拉斯已整整两个星期,他至少寄了 4 封信回印度。一封给维斯瓦纳塔·萨斯特里,邮票上是金字塔;一封寄给拉马钱德拉·拉奥的侄子克里希纳·拉奥。他讲了一路旅行的情况并写道:“尚未确定是直接去剑桥,还是先在伦敦停留一下再去。到达英国一切安顿好以后再告知。向您的兄弟问好,并向您的叔父致以敬意和诚挚的感谢。”

第二天,船离塞德港驶入地中海。4月 7 日离开马赛,此前曾在意大利港口热那亚停靠,在那里他又寄了一封信回家。

然后,穿过直布罗陀海峡,沿西班牙海岸上行,穿过比斯开湾就到了英国,“内瓦萨号”先在普利茅斯停靠,然后穿过英吉利海峡,4月 14 日到达泰晤士河口。

那是一个可爱的日子,万里晴空,比通常暖和一些。两天前复活节的好天气延续下来,使成千上万的伦敦人都跑到公园去,或者上街去。内维尔兄弟开车到码头接拉马努金,然后

送他到伦敦的南肯辛顿区克伦威尔路 21 号的印度学生接待中心。

伦敦是有 500 万人口的大城市,已经涨出了它古老的边界,延伸到萨里(Surrey)郡和米德尔塞克斯(Middlesex)郡的乡村和农舍之间了。它的人口是马德拉斯的 10 倍。马德拉斯不是南印度的首府吗?那么伦敦就是世界的首府,是指挥大英帝国的神经中枢。在伦敦还可以听到碎石路上双轮马车咣当咣当的车轮声,嘚嘚的马蹄声,和马轭上铜铃的丁零丁零声。但是这一切已开始让位给斯图倍克(Studebaker)牌折篷小汽车、沃斯利(Wolsley)牌“鱼雷敞篷车”以及(车身上画着雀巢巧克力广告的)双层公共汽车的吼声和烟雾了。伦敦是快节奏的,甚至哈代的朋友吴尔夫在旅居锡兰 7 年后于 1911 年回到伦敦时,也感到伦敦在颤动,“比我所熟知的过去节奏快得多,也喧闹得多。”

原来,拉马努金在马德拉斯认识的英国人绝大多数都是有教养的上层阶级,从口音就可以听出来,从不屈尊做一点体力活。现在,他在伦敦听到的是穿着破衣服的生意人说着带鼻音的伦敦土话。他看见点灯的人拿着长杆在街上走,磨刀匠推着两轮小车,卖松饼的小贩摇着铃沿街叫卖。这里有各种各样的英国人——男人既有头戴圆顶硬礼帽的,也有戴鸭舌帽的工人;女人既有衣着华丽的,也有穿得破破烂烂的。

刚一下船,对于任何一个印度人来说,英国都是一个奇异的新世界。内维尔带拉马努金去的克伦威尔路 21 号,就是致力于帮助印度学生适应这种变化的地方。全国印度协会在这儿有一些办公室。位于街角上这个庄严的、有大柱子的乔治王朝风格的建筑里,有几间房间印度学生可以进去。对面就是自然历史博物馆气势逼人的大厦,它那两种色调的石头和虎虎生气的鹰头狮身怪兽雕像。对于新来乍到的游子,这一

切充分显示了帝国的威风。但是克伦威尔路 21 号的印度学生接待中心并没有尽到责任；几年后的研究报告曾责怪接待中心对于新来的人，多半都是把事情搞得更糟而不是更好。

不过拉马努金和绝大多数在英国的印度人不同，他身边有内维尔，一个长期在剑桥的教师，帮他把事情理顺。他还遇见了 23 岁的印度年轻工程师拉马林甘（A. S. Ramalingam）。后者来自马德拉斯以南的库达洛尔（Cuddalore），已在英国住了 4 年，也来帮他适应新环境。不管怎么说，拉马努金总算挺过了克伦威尔路 21 号那些苛刻的折磨，4 月 18 日与内维尔同抵剑桥。他很快就在切斯特顿路（Chestertown Road）内维尔的房子里安顿下来。这里是剑桥的近郊，隔剑河与剑桥城相望。

切斯特顿路旁都是精致的城镇新式房屋，有的有角塔和小圆屋顶，房前草地一般都是用铁栏杆与街道隔开。有凸窗的内维尔的房子恰好在街角上沿河一个缓缓的弯曲处，所以房子设计的形状有点怪：迎街的一面只有 16 英尺（约 4.9 米）宽，向后成扇形展开，所以后院超过 50 英尺（约 15 米）宽。内维尔和他的新婚妻子阿丽斯（Alice）去年才搬进来。在 1914 年春天的两个月期间，拉马努金第一次与一个英国家庭共处。

那房子 19 世纪中期初建时，还只是一个不太大的两层楼房子。然而不久就扩建了。从上面看，它是手指形，房子背面清一色是褐色的砖，沿着奇怪的有角的地界伸出来。上面又加盖了第三层，多出了三个房间，使它在街角处看起来像个感叹号。

总之，内维尔的房子现在是足够宽敞了。在这个弯弯曲曲的房子里，不论他们现在把拉马努金安置在哪间房里，他都会感到能保存自己的隐私，而过去他从未有过这样的享受。房子的背面朝向一个大花园，过去曾经是一片梨园。从二楼的起居室，拉马努金可以望见剑河和维多利亚桥那边宽阔的

仲夏公共草地(Midsummer Common)。草地上交叉的曲径通向各个学院古老的石头庭院和走廊。

当然还有很多事要做：交费，填许多表格。大部分事都由哈代和内维尔办了。上学年的米迦勒节学期(Michaelmas Term, 10月中旬开始的秋季学期)后，已经把一年级学生名单按字母顺序印好了。拉马努金现在才来，有关人员就只好用钢笔蘸着黑墨水用手写体把他的名字 Ramanujan, S. 挤着写在 Pugh, F. H. 和 Rawlins, J. D. 之间。

受惠于那个奇妙的春天，头几个星期富有新的希望。一天又一天，气候温暖宜人，4月里山楂花已经盛开。广阔的乡村成了风信子花的海洋。月底，乔治国王来访剑桥，受到了成千的小学生的欢迎，他们挥动着英国国旗，总想偷看一下国王乘坐的戴姆勒(Daimler)汽车。

这时，拉马努金已开始和哈代、李特尔伍德一起工作了。李特尔伍德每周和他见一次面，哈代见面就频繁多了。拉马努金是多产的，勤奋的，愉快的。6月份，他写信回家说：“哈代先生、内维尔先生和这里的其他人都不摆架子，乐于助人。”

拉马努金到剑桥不是来上学的，但是既然在复活节学期(Easter Term, 4月尾开始)到达，他也就去听了一些讲座。有些讲座是哈代的，另一些关于椭圆积分的讲座是贝里(Arthur Berry)作的，贝里是剑桥国王学院的数学家，刚过50岁。本学期一天早上，贝里站在黑板前推导出一些公式，讲到一处，他看到拉马努金的脸因兴奋而闪光，贝里问他懂不懂，拉马努金点点头；贝里又问他还有什么其他的要补充吗？这时拉马努金站起来走向黑板，拿起粉笔写下了几个贝里没有证出的结果。后来贝里承认，这些结果他从未见过。

很快，关于拉马努金的一些议论就传开了。一位当时的大学生贝利(W. N. Bailey)就听到“奇怪的谣言，说他过去考

试都通不过,而且因为怕考试就逃跑了。除了这些谣言之外,我们只知道他名叫拉马努金,而且读音都不对,”大约读作 Rah-ma-noo-jn。人们不常见到他,他通常总在房间里忙。但当人们看见他时,总是会注意到他,记得他那矮胖的孤独的身影,有人说他“步履蹒跚”地穿过三一学院的庭院,穿着拖鞋,因为他还不习惯穿西式鞋子。

拉马努金最爱呆的地方是哈代在新庭院里的房间,这个比较小的四方形庭院只有按剑桥的标准才能称之为“新”,因为它是 1823 年建的,比之学院绝大多数其他建筑要晚 200 多年。哈代住在 A 号楼梯的二层,正好在通向大路的正门顶上。这条大路通向剑河对岸的后院(The Backs),两侧有两排 200 多年的老菩提树。从内维尔家到哈代的房间有好长一段路——先要经过城尽头的一座桥走到仲夏草地,沿一条步行小路穿过草地,走上公园大道(Park Parade),再沿某一条铺着石块的古老街道走进大门,这才走到了学院。总之要 20 分钟才能走到学院西南尽头的新庭院,这显然是太远了点。

在切斯特顿路住了 6 个星期后,6 月上旬拉马努金搬到惠威尔庭院 P 号楼梯处的一个房间。他写信给一个朋友说:“住在学院外,对教授和我自己都不方便。”

离开内维尔家,他可能有些难过。内维尔是从拉马努金下了“内瓦萨号”以后第一个得到他信任的英国人。内维尔为了帮他适应英国的生活做了许多事,而且,按照后来的记忆看,他和妻子阿丽斯的确是尽善尽美的主人,他们的好客简直是传奇式的。这一对夫妇年轻、思想开明,对拉马努金感情甚深,很可能有点过分溺爱他。

拉马努金在惠威尔庭院的住处,距 20 年前哈代还是一个大学生时的住房只有 5 分钟路程,且隔窗可见。但拉马努金在数学上要追赶上来的距离还不止 20 年。1886 年卡尔在《汇

编》一书写下的最后一笔,在一定意义上就是拉马努金数学教育的终点。卡尔的数学已经老了,在 1850 年还是新的,但自那以后其绝大部分都已枯萎而无可发展了。

## 2. 相聚在剑桥

现在已相聚在剑桥,再不必写那些冗长而令人尴尬的信了。那时阻隔两人的,既有文化的又有地理的鸿沟,很容易产生误会。现在以及后来几年,拉马努金几乎每天都可以见到哈代,告诉他自己的在印度所发展的方法,这些方法他本不愿用邮件来讲述。这时,笔记本就放在哈代面前,作者也就在身边,他可以尽量研究这些笔记了。

现在哈代看到,在最早两封信里拉马努金寄给他的那 120 个定理,有许多是一字不改从笔记本上抄下来的。第二本笔记本的第 5 章第 30 节,就是拉马努金第一封信中写的关于“由奇数个不相似素因子”构成的一类数。拉马努金关于伯努利数的第一篇论文中大部分也来自第 5 章。第 6 章是那些关于发散级数的怪东西,拉马努金原先还害怕哈代看了会认为他应该去疯人院的——例如  $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$  可以加起来成为  $-\frac{1}{12}$  而不加以说明。表面上看来,这很可笑,实际上它是试图对发散级数赋予意义——看起来,说它们加起来是无穷大最能说明其本质,也最精确的了;但是现在哈代发现拉马努金的推理后面还有一些东西,涉及一个常数。拉马努金写道:这个常数如同物体的“重心”——这是一个从初等物理或什么地方借用的概念。

哈代也看到,拉马努金有些结果是错的,有一些也不如拉马努金自以为的那么深刻,有些则是西方数学家 50 年前、100

年前甚至 200 年前就找到了的,不过拉马努金又重新发现了它们。但是有许多——哈代估计有  $1/3$ ,后来的数学家们则估计为  $2/3$ ——是令人惊心动魄的新结果。哈代现在看到,拉马努金那些厚厚的、充满了数学的信件,只不过是他积累了将近 10 年的笔记本的薄薄的样品,如同冰山之一角而已。那里有好几千个,可能是 3000 个,也可能是 4000 个定理、系和例子;它们一页连着一页,极少渗进证明或解释的水分,言简意赅,犹如警句,一两行之内压缩了极其丰富的数学真理。

这些笔记本使整整一代数学家伤透了脑筋,他们甚至对所含的数学财富的密度永远是估计过低。1921 年,这些笔记本公诸于世已 7 年之久,哈代还说“一大堆未发表的材料”还有待分析。两年后,他又写了一篇论文,专门讨论拉马努金在第一个笔记本的第 12、13 两章中关于超几何级数的工作。他不得不宣布,事实上“迄今为止,仅仅对于这两章,我才能够作出真正探索性的分析”。

那时,有一位匈牙利数学家波利亚(George Polya)来访哈代,向他借阅了一本拉马努金的笔记本,当时尚未发表。几天以后,波利亚几乎疯了,硬是把它退还给哈代。不,他不能再看下去了!因为,他说:只要被拉马努金的魔网扣住,他一定会倾毕生之力来证明这些定理,再也不会去发现属于他自己的东西了。

1929 年,原来也是三一学院研究员的伯明翰大学纯粹数学教授沃森,以及此时在利物浦的威尔逊——他在剑桥时就认识拉马努金——开始了对拉马努金笔记本的数学探险。两年后,沃森在回顾他们的进展时承认,这个工作“绝非易事”。例如,单是一对模方程,就要花上个把月来证明。然而这件事的回报却又极丰富,所以他与威尔逊“觉得一生中值得花相当一部分时间来编辑这些笔记本,并使拉马努金早年的工作得

为人知”。他估计,这项工作还得花上 5 年。事实上,直到 20 世纪 30 年代后期,他精力日衰之前,他已用了将近 10 年工夫于此,写出 20 多篇论文和一大堆从未发表的笔记。(威尔逊则只剩下 4 年多时间了,1935 年他死于一次例行的外科手术。)

1977 年,美国数学家伯恩特继续了沃森和威尔逊的未竟之志。干了 13 年,出版了完全是关于这些笔记本的 3 大本书,他还在做这件事,至今不辍。

坦白地说,在拉马努金初到英国的几个月里,哈代和李特尔伍德也只能先大致浏览这些笔记本,蜻蜓点水似地停留在他们最感兴趣之处;这里试着证一证,那里只想弄个明白。但就是这样初步的一瞥,已经大大加强了由早前那些信留下的印象。在收到第二封信后,李特尔伍德曾给哈代写信说:“我相信,他至少是一个雅可比。”哈代则用更慷慨的言词作比较,他这样写道:“他对代数公式和无穷级数变换等等所具有的洞察力才是最令人吃惊的。在这些领域中,我从未见到可与之相匹的人,我只能把他与欧拉或雅可比相比。”

欧拉和雅可比都是数学历史舞台上出类拔萃的角色。欧拉曾被称为“18 世纪最多产的数学家”,是几乎达 800 种书或论文的作者,其内容几乎涉及他那个时代数学的一切领域,这些书和论文有许多是他双目失明后的作品。我们今天所使用的三角函数的形式,就出于他 1748 年的名著《无穷小分析引论》(Introductio in analysin infinitorum)。今天的数学教材中处处都是欧拉:欧拉常数,欧拉判据,欧拉—马克劳林 (Euler—Maclaurin) 公式,欧拉积分,欧拉数等等,不胜枚举。雅可比生于欧拉死后 20 年。他是柏林一位银行家之子,他开创了椭圆函数论并把它们应用于数论。数学中许多地方也供奉了他的

大名：雅可比定理，雅可比多项式等等。

但欧拉和雅可比均非通常意义上的“伟大数学家”，哈代和李特尔伍德把拉马努金与他们相比也不是信口开河，而是这两位前辈代表了一种特定的数学传统，拉马努金也是其中的一部分——这就是“形式主义”\*。形式一词于此绝不意味着“僵化”或“枯燥无味”。欧拉、雅可比和拉马努金，除了有极深的洞察力之外，在处理公式时多的是窍门，他们就是为了数学的形式而热爱这些公式。一个“形式”结果就是指从公式中自己冒出来的结果，而不问这些公式究竟是什么意思。今天的计算机可以画出三维轮廓线，不管它是表示经济预测还是汽车保险费。有些画家对形状、线条和花纹与对主题同样看重。数学形式主义者的心智遵循的也是这样的思路。

当然，所有的数学家都需要处理公式，但形式主义者处理这些公式犹如魔术师，他们会巧妙地找出离奇的窍门和技巧，从而得到有趣的结果。他们会把一个方程中的变量代以另一个，从而化简了方程。他们知道应该在什么时候作积分，什么时候作微分，什么时候构造一个新函数，什么时候注意严格性，什么时候又可以不去管它。

但是在 1914 年左右，他们就多少被人攻讦了。其中之一是：有些特别苛求的数学家啧有烦言地说形式主义者对数学中精微之处如轧路机一样，一轧而过。其意是说，他们是不讲严格性的过去年代的孓遗，他们的一些精巧公式经不起过细的推理检验。

更有甚者，形式主义者被看成在数学的死水潭中生活。

\* 现在，形式主义一词通常指以希尔伯特为代表的、关于数学基础的一个学派的理论和主张，与这里把欧拉以至拉马努金包括在内的形式主义所指不同。后者称为公式主义似乎更为恰当。——译者

一个新的数学领域发展的早期常会得出一些有用的公式，为后来的工作指明方向；但当这个领域成熟了以后，当这些公式已得到应用与推广后，这些公式有时就显得太复杂而不再有用了。到了拉马努金的年代，这样的事在数学的一个又一个分支中都发生过。

这似乎是一种惩罚，其结果是许多人放弃了去寻找公式。形式主义者被看成是缺少深刻思想，只会大量生产狭隘结果的人，用的则是魔法般的技巧，而不会打开重要的新局面。他们的风格是机灵巧妙而非深刻；并不是高级的科学，而只是低级的艺术，甚至是妖术。

如果要把拉马努金的数学归入哪一类，那就是这一类。然而，哈代很清楚，如果说拉马努金有魔术师的诡计，那也是近乎靡菲斯特菲尔<sup>\*</sup>那种神效的魔术。拉马努金是一个把老一套东西都埋葬了的形式主义者。“很可能，公式的伟大时代已经过去了，拉马努金应当早生 100 年。”哈代这样写道。他承认：“拉马努金是他那个时代最伟大的形式主义者。”他的数学手法无与伦比。他的定理，不管是怎样得到的，后几代的数学家仍认为是高明的，意想不到的，而且是深奥的。

当哈代和李特尔伍德第一次细读了拉马努金的笔记后，产生了一种敬畏的心情。“他的结果之美妙与奇特完全是神秘的，”李特尔伍德在综述拉马努金后来发表的文章时这样评论，“它们是不是比人们所能想像到的奇特东西还要奇特？教训在于我们从未有过足够的期望；无论如何，读者会被令人发狂的奇异所震撼。”

面对拉马努金神秘的心灵，哈代的感受按他的朋友斯诺的说法：“是他一生最奇特的经历。对于拉马努金这样一个具

\* 歌德的名著《浮士德》中的魔鬼。——译者

有最深刻洞察力，但对现代数学的绝大部分却从未听说过的人，现代数学究竟是一个什么样的东西呢？”

拉马努金“把一种善于推广的能力，一种对形式的感应力以及很快地修正自己的假设的能力结合起来，总能让人感到惊讶，从而使他在自己的领域中，在自己的时代，绝无对手”。这就是哈代的结论，至于他对后世的影响，在哈代写这些话的时候，还不能说什么；在某种意义上可以说，正是他的奇特削弱了这种影响，哈代还设想：“如果不那么奇特，这个影响还会大得多。”

哈代为了把拉马努金带到剑桥，一直是冒了很大风险的，在熟悉了拉马努金的笔记后，他可能松了口气，而且感到骄傲。他写道：“拉马努金是我的发现。并不是我造就了他——和其他伟大人物一样，他们都是自己造就了自己——但在看到他的工作的人中，我的确是第一个真正合格的人。我一直记得，当我一下子看出我发现了怎样一个宝藏时，我是何等地满足。”

哈代很快就看出，拉马努金笔记本中的许多东西都值得发表，当然需要编辑加工。他的语言还需要适当定形，写成流畅的英语，采用熟知的符号。哈代，永远是一个数学编辑家，就着手做这件事。他写道：“拉马努金所有的稿件都经过我的手，我非常仔细地编辑，以供发表，前几篇我完全重写了。”但是他加上说明，他对其数学内容全无贡献——这句话完全可信，因为凡是他有贡献的文章，他都共同署名，以负文责。他写道：“哪怕是最小的帮助，拉马努金都要致谢，谨慎得近乎荒唐。”不论怎么说，拉马努金笔记本中原来只是一些条目，现在面目一新，成了适宜他人阅读的数学论文了。6月，他和哈代有两篇论文开了头，其中一篇已经准备好可以公布于众了。

通常每个月的第二个星期四，哈代都乘下午 2:15 的火车离开剑桥去参加伦敦数学会的例会。1914 年 6 月 11 日星期四哈代照例去开会，会址在皮卡迪利(Piccadilly)附近，他走进会议室，向朋友们打了招呼后，拿出了一篇论述拉马努金的定理的文章。参加者有霍布森、布罗米奇(人们曾坚持要拉马努金去读他写的关于无穷级数的书)、洛夫教授(即哈代大学时代的导师)，还有李特尔伍德。

拉马努金本人没有出席。

第二年，即 1915 年，拉马努金的文章一篇接一篇地发表了，包括上面提到的哈代在星期四例会向伦敦数学会提出的那一篇。但在 1914 年，只在《数学季刊》上发表了一篇。那个刊物上大部分是印度人的文章，拉马努金的文章标题是“模方程与  $\pi$  的逼近”(Modular Equations and Approximations to  $\pi$ )。

每个小学生都知道， $\pi$  即圆周周长与直径之比，约为 3.14。为什么要花时间来找如何求它的近似值的新方法呢？显然不是为了把它算得更准确；甚至早在 19 世纪中叶，数学家已能近似计算它到 500 位小数了，远远超过任何实际需要。两位加拿大数学家博温兄弟(Jonathan M. Borwein and Peter B. Borwein)就指出，只要取小数点后 39 位就足以在计算一个大得可以将当时已知的宇宙包围在内的大圆的周长时精确到误差不超过一个氢原子的半径。

但是， $\pi$  不仅是中学几何中一个无处不在的角色，它被织进数学这个完整的地毯里，而几何学只是其中的一个小角落。数学家发现用以  $\pi$  为基础的“弧度”去度量一个角，比用通常的“度”更方便，所以  $\pi$  在三角学中又起着关键作用。通过欧拉漂亮的关系式：

$$e^{\pi i} = -1$$

$\pi$  又与另一个超越数  $e$  和“虚数”发生了关系。如此简单的一个公式却宣布了一个美妙的数学真理，它把三角和几何学与自然对数并联，从而与整个“虚数”世界联结起来了。 $\pi$  甚至在概率论中也出现：在桌面上精细地画上一些平行线，使其间的距离恰好为一根针的长度，向桌上抛一根针，则这根针与一条线相交的概率为  $2/\pi$ ，这里  $\pi$  又一次跳了出来。所以，找到表示它的新方法就可能在看似互不相干的数学领域中找到隐藏其间的联系。

古代社会常把  $\pi$  之值定为 3。印度数学家婆罗门笈多在 7 世纪又取之为 10 的平方根，约为 3.16。西方求  $\pi$  之值的早期探讨用的是几何学：外切一个圆，做垂足，平分一些角，作一些平行线，弯来绕去终于把  $\pi$  定为某一线段之长。这个古典问题称为“化圆为方”，被证明是不可能的<sup>\*</sup>。但阿基米德 (Archimedes) 用另一种几何方法得知  $\pi$  之值在  $3\frac{10}{70}$  与  $3\frac{10}{71}$  之间。

17 世纪中叶，微积分这个有力工具出现了，得出了许多收敛于  $\pi$  的无穷级数；牛顿自己就得出了一个，并用以计算  $\pi$  到小数 15 位。“我羞于告诉你，”他对一位同事承认说，“闲暇无事时，我以此法计算了多少位数字。”

给出  $\pi$  或其近似值的许多级数中，有一些形式极为优雅，例如下面这一个：

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

上面这个式子有人归之于莱布尼兹，有人归之于苏格兰数学

\* 化圆为方问题即限制用圆规和直尺求  $\pi$  的平方根，这是不可能的，是希腊三大不可能问题之一。但计算  $\pi$  时并不需要它。详见 M·克莱因《古今数学思想》第一卷、第二章。——译者

家格雷戈里(James Gregory),还有人归之于印度喀拉拉邦的数学家。

沃利斯(John Wallis)在同一时期得到了下面的无穷乘积:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots$$

还有一个很漂亮的公式是:

$$\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

所以  $\pi$  这个极难驾驭的数(甚至把它写到小数点后一百万位,也找不到各位数之间有什么关系),可以用极简单的级数来表示。

拉马努金早先给哈代的信中就有好几个这样的级数近似式。现在,他的长达 23 页的论文充满了求  $\pi$  的其他方法。有许多是以模方程理论为基础的,这个理论可追溯到法国数学家勒让德在 1825 年的工作。拉马努金在他的笔记本中详尽地总结了这个理论。粗略地说,若有  $x$  的一个函数,把这个函数用  $x$  的整数次幂( $x^3, x^4$  但不能用  $x^{3.2}$ )的其他函数表示出来,联系这些函数的方程就叫做模方程。技巧就在于找出满足模方程的函数  $f(x)$  不足为奇,这种函数是很少有的,但一旦找出来,就会发现,它们有一些特殊的性质可供数学家利用。拉马努金发现了一些这样的函数,它们满足某些模方程,并在一定情况下会给出一些可用以精确逼近  $\pi$  的解。

后来发现,他有一些结果早就由欧洲的数学家——如克隆尼克(Kronecker),埃尔米特和韦伯(Weber)发现了。然而,哈代后来写道,拉马努金的论文仍然“极为有趣,并且包含了许多新结果”。且不说别的,这些级数中有一些收敛于  $\pi$  的速度之快就是惊人的。前面提到莱布尼兹的级数形状很可爱,但是用来计算  $\pi$  却几乎毫无价值;要精确到小数点后 3 位至

少要算 500 项。反过来，拉马努金有些级数有惊人的收敛速度。其中之一，取第一项就足以计算  $\pi$  到 8 位小数。多年以后证明，拉马努金的工作为设计用计算机最快速求算  $\pi$  的程序提供了基础。

自从拉马努金读到卡尔《汇编》一书的 10 年间，大部分时间他都处于一种心智上的茫然之中。在印度，周围就是他的家庭，朋友也都是熟悉的面孔。他是南印度人中的一个南印度人，是说泰米尔语人中的一个说泰米尔语的人，是其他婆罗门中的一个婆罗门。尽管如此，他也是一个数学天才，说不定是百年一见的，但又与他那个时代的数学割裂开了的数学天才。他使那些能一见其定理的数学家如纳拉亚纳·耶尔和塞舒·耶尔好奇而且仰慕，但是没有一个人真正懂得他的工作，他是孤独的，没有人能与他心智相通。

现在，他与李特尔伍德和哈代这样的人为伍，终于在剑桥有了一个知识的家园，一个数学家的群体。凡他能在自己的工作中看到的，别人也能看到，所以至少在一开始时，他不是独处异乡的陌生人。

他于 1914 年 4 月到达剑桥。那一天的剑桥是这样的一个剑桥：米尔路 (Mill Road) 上的剧院正在上演《致命的遗产》(The Fatal Legacy)。海报上说“猎狐场面壮观惊人”；老切斯特顿休闲场四周围起带刺铁丝网，防人在草地上玩木球；报上登的大消息就是已故国王的爱犬，那只处处伴着御主的爱尔兰猎犬恺撒在上星期六死了……

对于一个南印度人，尽管拉马钱德拉·拉奥在印度就教他像英国人那样用刀叉，却总觉得要被伤害——用一个又硬又尖的金属东西往嘴里戳；他的脚，穿草鞋松散惯了，穿皮鞋老是觉得夹脚，要好几个月才能习惯。英国人的名字叫起来叽

里咕噜，无论他们的脸形是圆是方，头发的颜色是棕色还是金色，他们那白色的面孔看起来都差不多。您可以和一个英国人谈上几小时，可是到了街上还是不认识他。当然还有别的，南印度人轻轻摇头在他的家乡是表示“是”，而英国人都认为是表示“不”。

然而，拉马努金初到的几个月热情洋溢，思乡、孤独与种种挫折都被感情压住了。内维尔目睹了他是如何适应的。他写道，是的，“他在一个陌生的文化中感到一些小小的不便，一些蔬菜因为从未见过而不能入口，穿鞋子对他那放松了 26 年的脚简直是受罪。但是他很快活，在他刚刚进入的数学新天地里尽情享乐，又受到印度学生的崇拜。”他的钱足够按自己的品位生活。他心无旁骛，从容地研究数学。在这个有着铺石块的街道、草地庭院和中世纪小教堂的古老城市里，虽然与马德拉斯远隔重洋，但正是在这里，拉马努金的心灵达到了涅槃之境。

然而就在这时，第一声炮火打响了。

### 3. 卢万大火

第一次世界大战的爆发，既在意料之中，也在意料之外。

人人都知道要打仗了。在整个 1913 年与 1914 年，全欧洲都是怒气冲天。1914 年 6 月 28 日奥地利皇太子斐迪南 (Franz Ferdinand) 被刺，引发了一系列事件。后来证明，这是无法抗拒的。德国与法国联合各自的盟友，彼此宣战了。德国向法国进攻时席卷比利时，破坏了它的中立，于是在 1914 年 8 月 4 日上午 11 点，英国也向德国宣战了。全欧洲马上都卷了进去。德国和中欧列强集结成同盟国，对抗法、英和其他协约国。

许多人其实是狂热地寻求战争，企图把 40 年的宿怨用炮火烧光。欧洲大踏步向战争进发，军旗飞扬，战歌响彻大地。然而军人们还没有动，制服都还是干干净净的。人们以为敌人马上就会受到教训，战争——两个月就会过去。有人说，“叶落之前就可以班师了”。

然而完全出乎意料：这场战争带来可怕的震惊——它不再是军人短暂而光荣的极度兴奋，而是月复一月，年复一年地折磨下去。8月份，德军按施利芬计划(Schlieffen Plan)冲击比利时，企图使法国称臣。法国也一样，按 17 号作战计划(Plan Seventeen)，采取进攻态势想直捣柏林。但是双方打了 6 个星期，速胜的希望都幻灭了。大军相遇，激战，流血。原来的计划都错了。9月份马恩河会战后，掘壕固守代替了大军的扫荡战术。巴巴拉·塔奇曼(Barbara Tuchman)在《八月的炮火》(The Guns of August)一书中写道：“战壕从瑞士掘到海峡，犹如划过法国和比利时的一道伤痕。……战壕决定了战争是阵地消耗战，是野蛮的，充满泥泞的，疯狂的谋杀，这就是西线，它们相持达 4 年之久。”

9月 11 日，当德法双方正鏖战于马恩河畔时，拉马努金写信给他的母亲，让她安心：“这个国家没有战争，战争是在邻国。那里离英国就像仰光离[马德拉斯]城一样远。”

当然这并不是真的，事实上战争要近得多，剑桥已经感受到战争的冲击。8月的第一个星期，来自爱尔兰的第六师就已集结在剑桥，在内维尔家对面的仲夏公共草地安营扎寨。圣体学院(Corpus Christi College)成了军官训练团的临时司令部；教授们、大学生们和研究助教们当了志愿者。在三一学院，雷恩那个大图书馆的四周有柱子的回廊成了露天医院。把木板铺在不平的石板地上，尽量把床放平，以便减轻回声，那回声是几个世纪以来这种石头场地所固有的。在医院西北

角,向上通往图书馆的螺旋楼梯处,安装了浴室;靠近李特尔伍德住房的南走廊,有光线自天花板向下就成了一个手术室;哈代住的新庭院的房间则成了办公室。

8月14日,一辆绘有很大的红十字的救护车送来了第一批伤员,现在这里的正式名称是“东部第一总医院”——三一学院露天医院。当月下旬,德国人烧了比利时城市卢万,驻守比利时蒙斯运河沿岸的两师英军退出阵地。撤退前的9个小时中,英军伤亡达1600人。许多伤兵很快就送到了内维尔庭院,放在图书馆下面回廊里的两排床上。学院的副院长杰克逊(Henry Jackson),一位可敬的古典学家,在去大厅的路上就可以看到伤兵们。

“我们有了一个新剑桥,”杰克逊写道,“有1700名士兵在受训,而不是原来的3600名学生。……军医、上校、少校和上尉们穿着草绿军服在大厅里进餐。”

9月初,第六师开赴法国,但剑桥仍挤满了军人,一连串开赴前线的师团以这里为最后的训练营地,在下雨的时候,马拉的炮车和其他军车把未铺沥青的路面压出好几英寸深的泥泞。

9月20日教堂唱诗班在内维尔庭院中央的草地上为四周回廊上的伤兵唱圣诗。

战争初期,沙文主义还没有被埋葬在愤世嫉俗的悲观情绪之中。“德国的堕落——它信奉邪恶与自私——是惊人的,”杰克逊写道,“虽然我从不认为普鲁士人是绅士,但我对他们的勤勉和效率有深刻的敬意,我认为他们居家也有美德。似乎是,他们的好品德反而促进了他们的邪恶。”三一学院院长巴特勒(Henry Butler)居然也相信“德国步兵不会射击,更挡不住刺刀。到紧要关头他们转身就跑,背上挨刀。许多[内维尔庭院的伤兵]对我证实,他们看见当德国人进攻时,把妇女

和儿童赶在前面上阵”。

对德国人的仇恨有增无减,甚至拉马努金也给传染上了,在他母亲的信中讲到德国人长驱直入穿过比利时说:“德国人放火烧了许多城市,屠杀和驱赶老百姓,儿童、妇女和老人。”

英国有一份通俗杂志《沙岸》(Strand),一直有一项专栏,题为“绞脑汁”,内容是不易解答的谜题,都编了号而且有诱人的标题,例如“苍蝇和蜜”、“镶嵌彩色瓦片”,答案则在下一期公布;每当到了圣诞节,“绞脑汁”就要扩版,作者把这些谜题编成一个个小故事。1914年就有一篇“乡村小旅店的难题”,把读者带到一个虚拟的城市小浮茨福德(Little Wurzelfeld),而主题则是讲在卢万发生的事。

8月末,德军奉行对平民的野蛮烧杀政策,开始放火烧卢万,这是比利时从列日到布鲁塞尔路上的一个中世纪小城,逐户逐街地放火,把藏有25万册书和许多中世纪手稿的大图书馆也烧了,杀了许多平民。卢万的大火震惊了全世界,激起公众对德国的反对;最终使法、俄、英更紧密地联合起来。英国报纸大叫“匈奴的进军”、“背叛文明”,这是大战前期的一个转折点,在很大程度上为这场战争定了调子。卢万成了文明崩溃的象征,现在连《沙岸》的“绞脑汁”也讲起卢万来了。

12月的那期《沙岸》出版后,一个星期日早上,马哈拉诺比斯(就是本书开头提到看到拉马努金在火炉前瑟瑟发抖,对他讲英国毛毯如何使用的那位青年)拿着这一期杂志坐在惠威尔庭院拉马努金房里的桌子前。马哈拉诺比斯是国王学院的学生,正在准备自然科学 Tripos 考试。拉马努金在后面小房的煤气炉上炒蔬菜,马哈拉诺比斯则为杂志上的问题伤脑筋,心里想,考一考他的朋友如何。

“有个题目想给你做”，他对后面的小房大叫。

“什么题目，说吧”，拉马努金一面炒菜一面说。于是马哈拉诺比斯读道：

威廉·罗杰斯对聚在火炉前的村民说：“有一天我和一位先生谈话，谈到了一个叫卢万的地方，就是被德国人烧光了的卢万。这位先生说他对这个地方很熟悉，因为他常到那里去看一位比利时朋友。他说他的朋友住在一条长街上，在他家一边的门牌号码是1、2、3，等等，而另一边的门牌号码加起来恰好和另一边门牌号码加起来相等，真有意思！他说，他知道这条街上那一边至少有50户人家，可是又不超过500家。我把这件事对牧师说了，他拿起铅笔算出了那个比利时人的门牌号码。可我不知道他是怎样算的。”

请读者也来算算那个房子的门牌号码。

马哈拉诺比斯（后来他创建了印度统计研究所，也成了皇家学会会员）试了一下，花了几分钟也就算出来了。拉马努金也算出来了，但是转了一个弯。“请把答案记下”，他说。然后就口述一个连分数——其分母是一个数加上另一个分数，而那另一个分数的分母又是一个数再加上一个分数，如此以往直至无穷。这个连分数不仅仅是这个问题的解，而且是这个谜题所蕴含的所有这一类问题之通解。上面说的那个问题只有一个解——那个房子的号码应是204，全街则有288户。因为： $1 + 2 + \dots + 203 = 205 + 206 + \dots + 288$ 。但是如果我没有50家和500家的限制，答案就不止一个。假如全街8户人家，6号就是答案。这房子左侧门牌号码之和 $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ 恰好等于右侧的 $7 + 8$ 。拉马努金的连分数把所有的解用一个通式全表示出来了。

马哈拉诺比斯听了大吃一惊。他忙问拉马努金是怎样做出来的？

“我一听这个问题就明白，它的解显然是一个连分数；然后我就想，是哪一个连分数，于是答案就来到我的头脑里了。”

#### 4. $\zeta$ 函数的零点

“答案就来到我的头脑里了”，这正是拉马努金的荣耀——这么多东西就这样马上来到了。莫非真如拉马努金有时说的，是女神娜玛吉利的神示，抑或按西方人的说法是凭“直觉”？两种说法同样不清不楚。然而正是这种直觉的力量，在某种意义上断送了他在数学上的发展。因为这使他看不见“直觉”的局限性，使他不想去了解现代的数学工具，掩盖了他自己的无知。

“他知识的局限性和它的深奥性同样令人吃惊，”哈代写道——

这里有这样一个人，他能解出模方程与复杂的乘法定理，其阶数之高闻所未闻，他对连分数的掌握，至少在其形式方面超过世界上一切数学家。他能自己找出  $\zeta$  函数的函数方程，能求出解析数论中许多最著名的函数的主要项，但是他从未听说过双周期函数，甚至柯西定理。他对于什么是一个数学证明只能作出最含混的说明。他的所有结果，不管是新的或老的，对的或错的，都是用这样一种方法得出来的：杂七杂八的论证，直觉和归纳；他完全不能给出一个连贯的论述。

这个神秘的“方法”有时会把他严重地引入歧途，哈代讲到的  $\zeta$  函数就是一个显著的例子。

拉马努金在致哈代的第一封信中就讲到哈代的《论无穷大的阶》一书中有关素数的一个命题。拉马努金说，他已“找到一个函数能精确地表示小于  $x$  的素数的个数”，此函数可以写成一个无穷级数。哈且回信说这非常有趣，但要求看证

明。拉马努金在第二封信中对此又做了发挥。李特尔伍德在看了这封信后，立即回应哈代说“关于素数的东西是错的”。现在拉马努金既已到了英国，哈代就去仔细考察一下是怎样搞错的。

拉马努金并不是第一个对素数着迷的数学家。素数——例如 2, 3, 5, 7 和 11，但是 6 和 9 不是素数（因为它们分别是  $2 \times 3$  和  $3 \times 3$ ，所以是合数）——是数系的基本构件；但一开始去计算就难免要问，什么时候会得到素数？这里面有没有某种模式？如果你把所有的数都填在一个方格板中，遇到素数就把这一格着色，否则就让它是空白，然后退后一步给你得到的图案照一张相，你能看出什么吗？你能把得出的图案叫做一种真正的模式吗？

乍一看是没有，没有什么明显的东西。然而再仔细看一下，又的确有某种东西在你眼前：你一直数下去，就有更多的素数。不存在最后一个素数。欧几里得在 2300 年前就证明了这一点。哈代这样写道：“数论就是以素数为原料建立起来的，欧几里得的定理告诉我们，有足够的原料来做这件事。”正如自然数是数不完的一样，素数也是数不完的。

那么，是有些东西了，还有更多的东西吗？有：当继续数下去的时候，你会觉得素数的密度越来越小了，素数是越来越多，但是它们在全部数中所占的比率在下降，例如前 100 个自然数（即 1, 2, 3, …, 100）中，素数有 25 个；再数 100 个自然数，有 21 个；数到第 9 组一百个，只剩 15 个了。偶尔也会遇到一段自然数，其中素数的密度会变大，例如从 1100 到 1200，其中素数有 16 个，但平均说来是在下降。

就只有这些了吗？当然不是，请注意——素数的密度是在下降，不过下降得非常慢。只要你耐心地、锲而不舍地往后看，就会发现这种变化慢得几乎觉察不到。就好像那种日出

时还在燃烧的火焰,显不出它的光亮;而不像那种熊熊燃烧的篝火,到了半夜就只剩余烬,黎明时早已冷了。对于素数,在开始 1000 个数中,每 100 个中有 15 个素数。当您数到几十亿时,每 100 个数中还有 5 个。可见,这种放慢实在是非常平缓。

您能说得精确些吗? 您能说出这种放慢到底有多慢吗? 换句话说,您能不能给出一个数学命题,告诉我们,数到某个数时到底会遇到几个素数?

数学家适时地猜出了,那个起抑制作用的影响,那种使素数个数的增加放慢的“力”是对数,一种称为对数的数学函数莫名其妙地在起作用。他们用“对数下降”来描述这样的过程。

与“对数下降”相反的说法是“指数上升”。指数增加意味着某种飞升:上升,再上升,越来越快,全是由它自身的增长;复利、退休储蓄 30 年后得到丰厚的回报,就是一个指数上升过程。开始增长不快,然后就加速。但如果是“对数增长”则恰好相反,存进去的钞票给您的回报越来越少。

对数回应在自然界是无处不有的。例如人类的感觉器官对外界的反应就是一种对数回应。一个房间里灯光加倍,您很难感觉到,人的眼睛既能对中午强烈的日光作出反应,又能对 1 英里(约 1.6 千米)以外火柴的一闪作出反应,就因为其反应是对数式的。如果光强增加 1000 倍(1000 可以写成  $10^3$ ),则视觉的反应只加强 3 倍而不是  $10^3$  倍。

很久以来,数学家就认为正是这种对数增长制约着素数分布的密度。用数学语言来表示,即为

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$\pi(x)$  表示不超过  $x$  的素数之个数。这个方程的意思就是:素

数个数就是  $x$  除以它自己的(自然)对数。事实上还不完全如此,确切的表示应为:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

这两个式子的意思基本相同,差别就在于表达式的近似程度, $x$  越大,近似程度越好。(高斯把它写成一个对数积分,原则上是相同的。)

1896 年,法国数学家阿达玛 (Jacques-Salomon Hadamard) 和比利时数学家德·拉·瓦莱-普桑 (Charles J. de la Vallée-Poussin) 证明了这个人们猜测已久的“素数定理”,上式即以“素数定理”著称于世。到 1914 年止,事情就停留在这一步:这个定理指出,当  $x$  变大时,  $\pi(x)$  与  $x/\ln x$  的比值趋向 1。这当然很好,已把一切都放在坚实的数学基础上了。但它仍只是一个近似,对其精确性还毫无线索,它没有说明这个比值趋向于 1 有多“快”,更谈不上给出一个公式,能够做到给一个  $x$ ,就可以告诉您不超过  $x$  的素数有多少个。例如,它说不出在前 100 万个整数中,素数共有 78 498 个。而拉马努金在写给哈代的信中却信心十足地说,他已找到一个函数能精确地表示小于  $x$  的素数的个数。

但他并没有找到。

拉马努金的公式是一个无穷级数,他在第二封信中一共给出其三种形式,例如对直到 1000 的  $x$  他给出的结果实质上是精确符合的。哈代后来发现,甚至对更大的  $x$ ,也惊人地接近。前 900 万个整数中,素数个数已精确知道是 602 489 个。拉马努金的公式给出的值则差了 53 个,不过比素数定理的经典形式还好些。更重要的也是最关键的一——他宣称,使用他的公式误差总在一定界限以内。这正是何以他在第一封信中要反对哈代所断言的:误差项的“准确阶数迄今仍未确定”,而

他坚持认为自己已确定了误差项。

但这些公式并没有能确定误差项的界限。早在 1913 年，当哈代第一封鼓励他的信寄到后不久，拉马努金的朋友纳拉亚纳·耶尔就把拉马努金关于素数的某些结果寄交《印度数学学会杂志》了，并且附言“证明即寄”，但是一直没有寄，因为它们并不存在，也不可能存在。因为拉马努金的结论是错的。

拉马努金到了英国，哈代研究了他的笔记本，听他讲自己的论证，于是找到了拉马努金是在哪里摔了跟头的。拉马努金是因过分依赖于小的  $x$  而误入歧途。他只对小的  $x$  试验了他的公式；对较大的  $x$ ，误差之大是他未曾想到的。如果他也对大的  $x$  作过试验，就会使他警觉而找到基本的毛病。哈代认为这个毛病极有教育意义，希望某一天可以就这个问题作一次演讲。哈代写道：“如果  $\zeta$  函数没有复零点的话，素数定理(可以说)就只能是这样了。”

黎曼  $\zeta$  函数是一个看起来足够简单的复变量无穷级数。“复”在这里并不表示困难和复杂，而是说一个变量有两个不同的组成部分：“实部”和“虚部”，两者在一起可以说是在一个二维平面里变化。1850 年，黎曼对  $\zeta$  函数作了 6 个猜想。到拉马努金的时候，有 5 个已经被证明。另一个迄今为止仍未证明，被称为“黎曼猜想”。

黎曼猜想：如果您令  $\zeta$  函数为 0，则所得方程的某些解——即其复零点——如果画成图，一定是在一条平行于“虚轴”，且在其右方半个单位的线上。如果这个猜想是对的，则关于素数的许多重要结论，还不只是素数定理，都可自动得出。

但是黎曼猜想是对的吗？至今谁也不知道，它仍是未证明的伟大猜想之一。在拉马努金到英国前后，哈代证明了一个稍有不同的结果：有无穷多复零点在这条关键的直线上，但

这和说所有复零点都在其上不同。著名的德国数学家希尔伯特(David Hilbert)曾说过,如果他死去 1000 年后还能再回到人间,他第一个要问的就是:黎曼猜想得到证明了吗?

拉马努金也遇到了一个类似黎曼  $\zeta$  函数的东西,但他误解了自己的发现。他忽视了其关键的复零点,好似它们并不存在,于是得到了某种形式的素数定理,而这个定理,简单一句话:是错的。“数学中有些领域,即使不管现代的严格性戒律,关系也不大,”哈代写道,“但是解析数论不属于这样的领域。”

后来,李特尔伍德关于拉马努金在素数方面的工作这样写道:“这些问题用尽了分析学的十八般武艺,也要花一百多年时间才能解决,而直到 1890 年尚未得证”,拉马努金不可能得到完全的成功。他只是意识到,对这些问题的研究可以从形式方面着手以达到使主要结果看起来合理。拉马努金的那个公式并非徒有其表,从整体看来,他的成就是极不寻常的。”

哈代对拉马努金的错误也十分宽容,“我不能生气,”他写道,“他的失败或许在某种意义上,比他的成功更为奇特。”后来他又后悔不该这样说,这未免过于感情用事。但拉马努金确实得到了一些东西——在得到错误结论时,又重新发现了素数定理;而在试图超越它时,他重建了一种论证法,虽然在技术上有毛病,其本身仍是光辉的。

但不管怎么说,拉马努金是错了,而在英国,在哈代的辅导下,他也明白了这一点。哈代写道:“他的直觉误导了他。”这就是要害。拉马努金的“直觉”,尽管肯定优于同时代的任

---

\* 原文如此,但可能是指 1896 年,素数定理就是这一年证明的。——本书作者原注

任何一个数学家,却不是万无一失的。

一个修车技工依靠他对机械的直觉就能知道机器是如何工作的,而说不出其所服从的物理或化学原理;一个作家只要知道哪一个情节应该在前,哪一个应该在后就够了,完全不需要解释为什么。但是数学家通常不能满足于猜想或假设甚至断言某事为真,他们必须证明,或者觉得他们已经证明了,或者按哈代说的:“把命题按一定规则排成队,使结论作为高潮出现,这一串命题都得是真的,而其排列必须服从一定的规律。”

证明不同于蛋糕上的奶油只是为了好看。请看这一串整数:31,331,3331,33 331,333 331,3 333 331,每一个都是素数,下一个也是。我们是否找到了一个隐藏着的模式?否!再下一个就不行了,它是17与19 607 843之乘积。关于形如 $2^{2^n} + 1$ 的数又如何?对于n=0,1,2,3,4,所得都是素数,那么对一切n所得的数都是素数吗?费马曾这样猜想过,但是他猜错了。因为欧拉发现n=5时就不是素数,它是641与6 700 417的乘积。

很多其他例子也像这样,看起来“明显”的模式并不是正确的模式,这种例子在数论和数学的其他分支多的是。哈代常引用的一个例子也来自数论。多年来,把数论函数给出的逼近与实际计算所得的素数个数相比较,表明这个近似值总是偏大;误差都是向着一个方向。您可以试到一千,试到一百万,试到十亿,试到一万亿,试到十万亿亿,结果都是一样。直觉如此有力地蛊惑着:这个结论总是对的——把这一点写成一个定理真是顺理成章,大可一证。但是这个定理是证不出来的,因为,尽管它直观上像是对的,实际上它根本就是错的。

李特尔伍德在看到拉马努金的信前一年就证明过一个定

理,说只要  $x$  足够大,素数定理预计的素数个数与真正的素数个数相比一定偏少而不偏多。后来还有人找到了一个数, $x$  在达到这个数时,一定会出现从偏多到偏少的逆转。这个数之大会令你咋舌——比全宇宙的全部粒子的总数还大,比国际象棋可能走的着数还大。哈代说:“这是在数学中具有确定意义的最大的数,它可以作为人们被直觉所误的一个例子。”所以,证明是不可或缺的。

“证明”一件事,就是给出一个保证——即若数学实体  $A$ , $B$  和  $C$  服从约束条件  $D$ , $E$  和  $F$ ,则定理成立。一个定理一定要经得起反复使用,时常要用于新情况。若不能精确地决定定理适用的条件,您就会搞错。一个数学家若缺少铁定的证明,就如同电影里冒失的青年警官自以为是地断言是佣人作案,他的上司马上就打断他,警告说:“行了,但这说服不了法官。”

拉马努金在他的笔记本和早期的信件中,信誓旦旦地宣布了一千次:“毫无问题,就是这样的。”就像那个小警官说:“没错,就是佣人干的。”绝大多数情况下他的结果的确是对的。但是在到英国之前,他的头脑里还没有确立足够的科学理念。把我们上面的比喻再引申一下:他对拿出证据的规则还不太知道,对有关犯罪法律的知识还很欠缺,甚至对有根据的法律论证标准是什么,也不了解。拉马努金对他的新的素数定理的“证明”,根本算不上是一个证明。

一个“证明”怎么会错呢?您按规矩进行推理,相信您所说的是对的,怎么可能跑出来一个数学家说它不对?换句话说,其每一步似乎都清清楚楚,服从无误的逻辑步骤,怎么会错呢?

一言以蔽之,处处都可能出错。

一个可能是人们所熟悉的,平凡得不足挂齿的例子就是

“证明” $2=1$ 。首先,令  $a=b$ ,然后两边乘以  $a$  得到  $a^2=ab$ ,把等号两边加上  $a^2-2ab$  得到:

$$a^2 + (a^2 - 2ab) = ab + (a^2 - 2ab)$$

上式可以化成  $2(a^2 - ab) = a^2 - ab$ ,两边再除以  $(a^2 - ab)$ ,即得  $2=1$ 。行了,每一步都合逻辑,但得到的结果却与常识相悖。

错误究竟在哪里呢?其实这只不过是许多初等证明常见的谬误——用零做了除数;这在数学上是不允许的,因为它的“答案”是无意义的。

但是有人会说,这个证明从未说过要用零做除数呀。

请注意:我们一开始假设了  $a=b$ ,在结尾处则是用  $a^2 - ab$  去除,而它恰好是零。

当然拉马努金决不会出这种丑,在这一点上他是完全无辜的。上面的例子只不过要说明,一个人忙于用符号做运算,而没有估计到可能会产生极微妙的隐患使他出错。

作为数学家,您可能遇到各种各样的麻烦,您可能会去微分一个函数,而没有看到它其实不能微分;或者您会丢掉一个级数后面的项,认为它们比前面的项“阶数”更低,但其实它们对级数之和有本质的影响;您也会设想一个在有限项情况下是正确的运算,对无限多项也是正确的;您还可能在两点之间积分一个函数而没有注意到积分在这里没有意义,于是您在证明中用了一些没有意义的量,如“无穷大减无穷大”。

哈代写道:

拉马努金「关于素数」的证明依赖于大量使用发散级数,对于变换双重极限所会遇到的困难,他全然置之不顾;例如,他全然不去区分级数  $\sum a_n$  之和与其阿贝尔极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum a_n x^n$  之值,或者其他分析学家为此目的所使用的其他极限值。

当然这些都是技巧性的问题——正如那位冒失的警官没有注意到法律上的漏洞一样。拉马努金靠他的直觉绕过了许多障碍，但是他那被中断了的教育未能警告他，不是所有的障碍都绕得过去的。问题不仅在于他有时会错，而是在于他缺少充分的数学知识，以至分不清何时对，何时错。他宣布正确的和不正确的定理都同样自信，具有同样讨人喜欢的天真的信心。即使他给出了证明，他也绝少论证这就是证明。

关于拉马努金，李特尔伍德后来说：“什么是一个证明，现今人们已如此熟悉，所以都认为不必去说了，他却可能从来没有一个清楚明确的概念。如果他从什么地方得到一点含有深意的推理，而证据与直觉相混又使他觉得结论已肯定无疑，他就不再探讨了。”

遇上了哈代，真是拉马努金的好运。始终坚持严格性的哈代几乎是单枪匹马地去改革英国的教学，而且写出了经典之作《纯粹数学教程》。两年前他曾对罗素说过：只要能够证明出什么，只要是真正地证明了，他就会乐不可支，他说：“如果我能证明您会在 5 分钟以后死去，我会很伤心，但是证明给我的欢乐一定会大大减轻我的伤心。”直觉的化身——拉马努金，与严格性的使徒——哈代——迎头相碰。

现在，还有今后几个月和几年，哈代将和他一同工作，试图克服他的缺点，而这缺点就是拉马努金为他自己在知识上的孤立所付出的代价。拉马努金已经 26 岁，早就确定了自己的工作方式，不过哈代的努力还是有回应的。正如哈代后来所写的：

他的思想多少有些僵化，他从没有变成一个“正统”的数学家，但是他还能学着做一些工作，而且做得极好，不可能系统地教他，但他逐渐吸收了一些新观点，特别是他学到了什么叫做证明。他后来的文章，虽然仍是独特的、个

性化的,但读起来像一个有学问的数学家的文章了。

1915年初,当马哈拉诺比斯给他念《沙岸》杂志上关于卢万街道门牌号问题时,拉马努金已经开始换挡了,变得按哈代所要求的那样工作。“我已改变了发表我的结果的计划了,”他在1914年11月写信给克里希纳·拉奥这样说,“战争结束前,我不会去发表我的笔记本上的老结果。到这里来以后,我已学会了一点他们的工作方法,我正在试用他们的方法来得到新结果。”次年初,他确实把自己原来的工作放在一边,在新的研究中汲取工作方法。“我的笔记本束诸高阁已有四五个月,”他给儿时的朋友苏布拉马尼安[两年前他们两人在“夏宫”同住过一段短时间]的信说,“当我还没有严格证明我笔记本中的结果时,我只发表新的研究工作。”

他正在吸收哈代的福音:证明和严格性。

但是哈代还说,尽管他正在吸收新东西,拉马努金“独创性的思想之泉毫无减退的征兆”。例如在拉马努金给苏布拉马尼安的信中,他突如其来地另起了一段:“我现在告诉您一个很奇怪的函数”,然后通栏写下了模式很特别的一串分数:

$$\begin{aligned} & 1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 2/3, 3/2, 1/4, 4/1, \\ & 2/4, 4/2, ^{*} 3/4, 4/3 \end{aligned}$$

以此为先导,他极巧妙地构建了一个函数,说来也怪,对这一串分数,此函数在数学上无定义,而只对“无理数”,即不能写成分数的数,它才有定义。他称之为“一个很怪的函数”。然后,他继续写道:“它还有一点怪……想一下这个函数[行为如何]……”这又是那个老牌拉马努金,他对函数的奇特行为之热衷溢于言表。

\* 原文此处误为4/4,今更正为4/2。——译者

哈代在数学上最大的成就在某种意义上就是——帮助拉马努金在数学上快速成长而又不抑制其创造性，丝毫不使他对数学的热情之火熄灭。如果对拉马努金的缺点嗤之以鼻，然后出于职业习惯硬性加以纠正，这是很容易做的事；就好比一个不称职的编辑，在一篇清爽的稿件上大肆乱批。但是哈代知道，拉马努金的数学洞察力，比之哪怕是最了不起的技巧性的运用都要珍贵得多，懂得证明定理所需的数学工具固然好——但是首先得要有定理让您去证。

当您翻阅《伦敦数学会会刊》时，很容易忘记这一点。在这里，和在一切数学刊物中一样，成百步密切相关的推理步骤，写上几十页，其结晶就是一个证明。在这里，数学就是步伐整齐地向确定无疑的结果前进。 $B$  直接得自  $A$ ,  $C$  得自  $B$ , …  $Z$  得自  $Y$ ；但是没有一个数学家真正是这样工作的。如上的逻辑推理只是形式证明所要求的，而对于洞察到  $Z$  毫无帮助。相反，却如哈代说的：“数学家通常是先通过直觉来发现一个定理；这个结果对于他首先是似然的，然后他再着手去制造一个证明。”

定理的出现正如一切创造性的产品一样——或者来自灵机一动，或者来自一连串小小的见解，而这又是无休止的苦苦思索。您可以一开始是试几个例子，非正式地“证明”一下您满意的结果；然后，您可以再回过头来，用尽学过的十八般武艺，给出哈代特别擅长的那种证明。但那都是后来的事，即在您已经有了什么需要证明的东西以后。此外，它可能绝大部分是您能学到的技巧性的东西，就像需要证据的法律那样。至于严格性，如李特尔伍德所说：“在分析数学中，在大学毕业以后就不是首要的了，而在有了真正的思想以后，任何一个名副其实的数学家都拿得出来。”

有真正的思想——那才是最珍贵的东西。

德国数学家克莱因(Felix Klein)曾经说过：“推进数学的，主要是那些有卓越直觉的人，而不是以严格的证明方法见长的人。”(后来接任哈代在剑桥的职位的数学家莫德尔加上一句“克莱因的说法只对极少数数学家……如同拉马努金那样的数学家才合适”)一个“真正的思想”并不是像一个 Tripos 试题那样由某个不知名的数学聪明人准备好的。它当然得来自某处，先要看到它，然后才谈得上证明它。但它来自何处？这就是神秘之所在。那些研究创造过程的学者们生气地绕圈子，空话连篇而最终得不到使人满意的解释，其根源就在于这种神秘。它涉及“才能”，涉及“天才”和“艺术”；它是教不出来的。但是，一旦得到了它，就必须培育它，保护它。

哈代知道，有许多数学上的能工巧匠都会坚持不懈、按部就班地推理。但是与拉马努金一比就什么也不值了。多年以后哈代设计了一种关于天生数学才能的非正式的评分表，他给自己评了 25 分，给李特尔伍德评了 30 分。给他同时代最伟大的数学家希尔伯特评了 80 分。

对拉马努金他评了 100 分！

“不可能要求他屈从系统的教导，或试图让他把数学从头学一遍，”哈代写道，“我担心，如果不适当地坚持要求拉马努金去搞他厌烦的东西，我就可能毁掉他的自信心，或者破坏了他的灵感魔法。”所以哈代寻找一个微妙的中间立场，而不致束缚拉马努金的创造性。正如他写的那样，他能够教他“那些他不可以不知道的东西，……不能再让他终生都误以为  $\zeta$  函数的零点都是实的。所以我必须试着去引导他，在一定程度上我是成功的，然而，我从他那里学到的比他从我这里学到的多得多”。数学家劳伦斯·杨(Laurence Young)曾经写道，教给拉马努金新东西“就如同在一个已经写满了极有意思讲座提纲的黑板上写字”。

哈代手上是一朵稀有的娇嫩的花，战争使他养育这朵花的责任更加重了。

## 5. 文学士拉马努金

1915年1月，三一学院副院长杰克逊写道：“剑桥一片漆黑，”“街上和院子里煤气灯全无，电灯极少而且都加了灯罩；高桌子上点的是蜡烛。通往剑桥的道路都堵住了，以防过往的汽车会招来东海岸的齐柏林飞艇。还有传言，说敌人上周就准备去轰炸温莎堡。”

4月份，也就是拉马努金到英国一年时，杰克逊写道：“在法国和佛兰德(Flanders)\* 我们毫无进展。在达达尼尔海峡战事胶着。军队并未能如需要的那样增长。我们没有充足的弹药给现有的军队，而德国人准备干坏事已有多年了。”

伤兵如潮水般涌进剑桥。到1915年6月，第一东部总医院已接收了12 000人。他们晚上乘火车到车站，由头戴白帽的护士和救护车来接。一个剑桥的女学生后来回忆：“那段时间，如果伤兵一个接一个地来到，我就知道一定是在法国或者佛兰德战况激烈。”

伤残军人流入剑桥，身强力壮的则往外流。剑桥已没有多少大学生了。正常时约有3500人，现在只留下五六百了。学院的研究助教们去外交部、国防部、财政部服务，有人干脆入伍了。据杰克逊说，有个剑桥人写道：“前线成了第一流的俱乐部，在那里能见到所有的朋友。”这时，大学的医学实验室已供第一东部总医院使用；化学实验室做毒气战的研究；工程实验室为军需部制造炮弹和测量仪器。

\* 佛兰德，比利时西部与法国北部接壤处。——译者

李特尔伍德也在奉命离开的许多三一学院研究助教之中,他现在是皇家警备炮兵的少尉。他对战争其实什么也做不了,但是他适应了,正如当年他能适应 Tripos 考试一样,一副“心情愉快无所谓”的样子,很是动人。1915 年下半年,他奉命去搞一个新的数学方法以改进防空炮射程表。(哈代嘲弄应用数学说:“就是李特尔伍德也不能把弹道学变得受人尊敬,如果李特尔伍德做不到这一点,谁还能做得到呢?”)在从军的三一学院研究助教中,他几乎是惟一没有被提升的,最后终于免除了日常杂务,允许他与伦敦的朋友同住。一位传记作者客气地说“在战争年代,弹道学还填不满李特尔伍德的工作时间”。从 1915 年到 1919 年,他与哈代合写了 10 篇与战争风马牛不相及的数学论文。

尽管如此,李特尔伍德还是离开了剑桥,离开了拉马努金。正是李特尔伍德那出类拔萃的数学能力,吸引拉马努金来到剑桥这个第一流的地方。可是拉马努金才到英国 4 个月,连气也没有喘过来,李特尔伍德就离开了,所以拉马努金比过去更加依赖哈代。

后来哈代也按“德比方案”登记服兵役。德比勋爵(Lord Derby)是一个精明的政客,他先发制人把不得人心的征兵服役改成自愿服役,不过还是有社会的压力使您“宣誓”表示已经准备入伍。但当 1915 年 10 月德比方案实施时,哈代已 38 岁,按李特尔伍德的说法是公认“不宜”从军的,因此战争年代绝大部分时间他仍留在剑桥。

与第二次世界大战不同,第一次世界大战期间人们的反战情绪高涨。哈代的行动使得后来至少有一份他的讣告说他是一个良心反战者,其实他不是。在战争后期他写过“我不喜欢把良心反战者列为一类”。然而,正如李特尔伍德说的,哈代“热心写文章揭露反战者所受的臭名昭著的虐待”。他属于

一个严肃的、有崇高理想的集团，称为“民主控制联盟”（即 Union of Democratic Control，简称 U.C.D.），其目的是争取立即和平。那时人们还认为这场战争只是一次短暂的，但也是血腥的冲突。哈代是其剑桥分会的秘书，他在使徒社中的老朋友迪金森是主席。他们第一次公开聚会是在 1915 年 3 月 4 日。后来在 11 月，该组织宣布将在三一学院李特尔伍德的房间里聚会时——李特尔伍德是民主控制联盟的一个缺席会员，曾书面表示允许使用他的房间——当局就把它查封了。

在拉马努金的堡垒外，战火纷飞，战争越来越近了。秀丽的剑桥变成了一个训练营和医院。1915 年 5 月，“露西塔尼亚号”（Lusitania）被击沉，大大加强了反德情绪。到了 6 月，食品价格比一年前上涨了 32%。与德国数学家学术上的往来切断了。李特尔伍德和其他数学家都走了，哈代也为数学以外的事分心了。

然而，到那时，战争还未直接影响到拉马努金。不论他个人对战争的反应如何激烈，他仍然处于一种思想上有活力的乐趣之中。

从他到达英国起，一直定期写家信，开始每个月写三四次，到了 1915 年，还要写两次左右；向家人规规矩矩地通报他仍坚持素食，进行宗教活动。他写给印度朋友的信中极少提到战争，而是讲自己的工作和进展，询问家人情况，甚至偶尔提一些建议。他还寄给在印度的两个弟弟一大包英国文学书籍。

他常常为寻找食物和做饭操心，这多少有点使他不适应。还有英国的严寒以及紧绷在他的肥大腰身上的衣服也使他不舒服。特别是佳娜琪的信没寄到时更觉得难受。但是绝大多数情况下，他埋头在数学巅峰上，快乐而艰苦地驰骋。

当年他给哈代的第一封信曾希望哈代帮助他发表他的结

果。现在，在1914年和1915年，从他的家信可以看出他是多么关心这些文章发表的情况。1914年6月他写道：“我已经写了两篇文章……哈代先生今晚将去伦敦，在伦敦数学会宣读关于我的结果的一篇文章。”

在8月他写道：“我已写了3篇文章，清样已经寄到。我正在写另外3篇，它们都会在假期结束时，即在10月发表。”

1914年11月他写道：“由于战争，我的结果发表很慢。”

1915年11月他又写信给纳拉亚纳·耶尔说：“我要花几个月时间把那篇文章系统写好后发表。”

在权威的英国数学刊物上发表文章，使他本人乃至马德拉斯都尝到了作为数学家的荣耀。只有印成铅字的文章，才能使家人和朋友刮目相看。这是让世人瞩目的惟一办法。有一次，当他知道阿南达·拉奥(Ananda Rao，他在国王学院学数学，是马德拉斯一个法官的儿子，拉马钱德拉·拉奥的亲戚)正在著文应征史密斯奖。这时，他直接去找哈代，询问他是否也可以应征。研究数学深深地满足了拉马努金感情和内心的需求。但是名声、赞美和赏识，也满足他另一些同样迫切的需要。在才智上，拉马努金不是也不可能“如常人可比”；但是在这个社会的公众关系方面，他也是常人：他需要别人承认，他绝对少不了这一点。

现在，他已得到满足。到1915年，他已发表9篇论文，5篇在英国刊物上。而在此前的27年中只发表了6篇——除1篇外，其余5篇全都发表在《印度数学会杂志》上。

身居英国的益处，拉马努金绝非不知道。他原计划两年后回印度，在1915年6月他写给朋友苏布拉马尼安的信中还说他将在次年返印。但在下一个月的另一封信中他就提出，回印度也是暂时的，他写道：“我有必要再呆几年，因为在马德拉斯，我的工作既无人能帮助，也没人能评审。”

拉马努金初到剑桥，有一阵子人们显然把他的腼腆看作不友好，学生们有时还骂他。现在他已广为人知了，甚至成了传奇式的人物；他的房间成了圣地。一个来自孟买某学院的学生德希穆赫(C. D. Deshmukh)后来回忆：“当我 1915 年 7 月到达剑桥，并且得知当时拉马努金也在，不由得打了个寒战。”拉马努金现在的成就已使他成为印度学生常谈的话题。阿南达·拉奥还记得拉马努金在茶会和其他社交场合，自由地处在英国人和印度人之间。马哈拉诺比斯，拉马努金星期天早上总带着一起散步的那个人，还记得人多时拉马努金就缄默不语，人少时就活泼起来。总之，他是印度学生高度敬仰的人——那个数学天才，那个英国人千方百计带到剑桥来的人。有两张他在这段时期的照片保留至今，他都处在一群人中，而且都在正中的位置。

在两个学期之间长长的停课期间，拉马努金大部分时间呆在剑桥（按校历规定每年只有 22 周课时）。有时他也到伦敦去，看看动物园或大英博物馆。有一次他和一位朋友查特吉(G. C. Chatterji)去看一个关于牛[津剑]桥大学学生的闹剧《查理的姑妈》(Charley's Aunt)，剧情是查理请一个女孩子到房里午餐，而一位女长辈相伴是不可少的，年轻的范古勋爵(Lord Fancourt)则冒充查理在巴西的姑妈。此剧自 1892 年第一次上演后便成为伦敦舞台上每年必演的节目。剧中嬉笑怒骂，插科打诨，正合拉马努金的口味。他捧腹大笑，眼泪都流出来了。

到了 1915 年 10 月中，拉马努金从惠威尔庭院的房间搬到正在大庭院后面的主教宿舍(Bishop's Hostel)D 号楼梯的新房间。这并不是 1669 年建的主教宿舍，而是 1878 年在老房子附近加盖的两幢红砖房，原址是学院的马厩。拉马努金的

房间就在其一的二楼上,从房间的东窗隐约可见老房子尖尖的屋顶和山墙上的窗子。他有一个大客厅,大约宽 14 英尺(约 4.3 米),长 20 英尺(约 6 米),一个小小的卧室和一个小小的烹调处——原是住佣人的小房,存放煤和食品,兼作厨房。

其布置和他在惠威尔庭院的老房间几乎一模一样,但是现在离哈代更近了。从贡伯戈纳姆,到马德拉斯,到切斯特顿路,到惠威尔庭院,似乎有一种无形的力量把他越来越拉近哈代。现在到了主教宿舍,两人相距只有百步之遥了。

1915 年晚些时候,拉马努金关于高合数的大论文刊载于《伦敦数学会会刊》,这是他到剑桥一年多以来最重要的工作。早在上年 6 月份,哈代就向他在数学会中的朋友们介绍过此文了。11 月稿件写成,但需要修改,到 1915 年 3 月全文定稿,现在终于发表。

文章如此之长,涉及的领域又太宽,所以分节编号,甚至列出一页目录以方便读者查阅。早些时,拉马努金曾请数学家贝利和另一位数学家波拉德(S. Pollard)看过此文。贝利回忆道:“他从最初步开始,用几页篇幅极简明地解释了他的思想和论证。波拉德苦苦琢磨他的论证,结果严重头疼;我是早早放弃了这份苦差。”

我们记得,合数就是一个非素数的数,21 作为 3 与 7 之乘积是一个合数,22 也是合数;但 23 是一个素数,因为它只是自身与 1 的乘积。对每一个合数都可以列出能够除尽它的数,称为其因数。例如,1,3,7 和 21 都是 21 的因数,对于 22 则有 1,2,11,22。24 则可被 1,2,3,4,6,8,12,24 等 8 个数除尽。

最后这个 24 就是拉马努金的论文所要讨论的数。它有

8个因数,比一切小于24的合数的因数个数都多,这一点就使24成了拉马努金说的“高合数”(highly composite number)。22有4个因数,21也有4个,20有6个。所有小于24的数其因数个数连7都达不到,更不用说8了。所以,一个高合数按哈代的说法就是“最不像素数的数”。拉马努金研究它们的性质已经有些时间了,他的第二本笔记最前面几页就列出了大约100个高合数——前几个是4,6,12,24,36,48,60,120——并且,他找出了它们的模式。

构成任意合数N的素因子可以写成以下的形式:

$$N = 2^{a_2} \times 3^{a_3} \times 5^{a_5} \cdots$$

这里 $a_2, a_3, a_5$ 等数是素数2,3,5,⋯的幂。例如高合数24可以写成 $2^3 \times 3^1$ 。用上面的记号, $a_2 = 3, a_3 = 1$ 。拉马努金发现,对任意高合数, $a_2$ 必等于或大于 $a_3, a_3$ 必等于或大于 $a_5$ ;仿此类推,不管您算到多么远,决找不到一个高合数可以写成 $N = 2^3 \times 3^4 \times \cdots$ ,永远不会。他还证明了,除了两个例外(4和36),构成一个高合数所需的最后一项 $a_n$ 必是1。接下来,他用了整整52页推理,证明这些事以及其他一些真理。这种推理,哈代称之为“具有初等的但极为精巧的特性”。

哈代指出,拉马努金所讨论的“是非常特殊的问题,多少远离了数学研究的主流。但是他在处理这些问题时表现的非凡洞察力与创造性,则是毫无疑问的。同样无可置疑的是,他的这篇论文是多年来在英国发表的最值得注意的论文之一”。

在剑桥,每个学生都有一位导师照看并监督其进展。拉马努金的导师巴恩斯说,拉马努金可能是三一学院的顶尖学生(包括李特尔伍德)中空前杰出的。虽然巴恩斯后来成了英国国教的大主教,当时却是有相当地位的数学家,是福赛思的弟子之一,曾与哈代一起力主Tripos的改革,本人也曾有过重

要的数学发现。1915年1月,他致函马德拉斯大学教务长迪尤斯伯里,谈到拉马努金的进展时说,拉马努金是“杰出的。他完全证实了来此时人们对他寄予的期望”。他的奖学金为期两年,很快便将届满,应予“延长,直到他被选为学院的研究助教。我希望在1917年10月能进行这一选举。我坚信他能被选上”。他的意思就是,拉马努金会成为三一学院的研究助教。

几天以后,哈代也致函迪尤斯伯里,称拉马努金“毫无疑问是当代印度最好的数学家……他在选择研究课题和研究方法上总是很奇特……但他的才华超常是毋庸置疑的;在某种意义上,他是我历来认识的最出色的数学家”。

远在马德拉斯,弗朗西斯·斯普林爵士也参加了这个大合唱,特别请求把拉马努金的奖学金延长两年。在1915~1916学年的深秋和初冬,马德拉斯当局一直在讨论把奖学金延长一年还是两年。斯普林写信给迪尤斯伯里说,如果只延长一年,拉马努金就可能不会如计划那样于1916年回印度;如果他的奖学金在1917年春结束,他最多晚9个月也无论如何会回到印度。

然而马德拉斯大学认为,如果三一学院通过给予研究助教职务,就会与大学的奖学金重叠,因此决定延长一年,并可再予延长。

马德拉斯的奖学金为每年250英镑,再加三一学院每年60英镑的奖学金(exhibition)\*。在1914年,一个英国产业工人年收入平均为75英镑,个人所得税的起征点为年收入160英镑——只有7%的工人达到此值,所以尽管拉马努金每年寄50英镑回印度做家用,他仍有舒适的固定收入。特别如哈

\* 该奖学金名为exhibition,必须通过考试才能获得。——译者

代所说，“拉马努金的饮食简单得几近荒唐”。

拉马努金在学院并无正式的任务，他可以爱做什么就做什么。他可以埋头数学而不必为自己或家人的生计操心。但还有一件事让他不甘心——他还没有学位，而这是公认的学术成就的最确凿的明证。尽管对他而言，这只是形式，然而他需要它。

入学成为一个研究生，不言而喻你必须已有了大学文凭，但当时对他免去了这项要求。现在，1916年3月，他“靠自己的研究工作”，主要是那篇关于高合数的长论文，得了一个学士学位(B.A.)。他要交5英镑文凭费，对两位考试者他还得每人各付2英镑。现在，在两次学院考试不及格以及在市立中学毕业12年后，他终于得到了学位。

3月18日下午早些时，他和一班学生同穿学位长袍，在大学评议会大厅前照相留念。在这一群人中，他个子最矮又最粗壮，有如招募的新兵，端正地站着很引人注目，他的方帽子平平地戴在头上；裤脚短了好几寸，衣服绷得紧紧的，仿佛扣子都扣不住似的。

不知是因为奖学金延长了一年，还是害怕德国潜艇疯狂攻击英国船只，拉马努金并没有在春天回印度。下一年的大部分时间，他与哈代共同研究一个问题，这个问题把他们两个人的名字牢不可分地捆在数学史册中。

哈代继去年给迪尤斯伯里的信后，那年6月又写了一个正式的报告，在谈论拉马努金的进展时，喜悦心情受到了战争的损害：

从一个方面来说，拉马努金是极其不幸的，战争对数学研究的进展自然有灾难性的后果。它把本来会倾注于他的工作的兴趣分散了四分之三，并且使欧洲大陆的数学家几乎不可能注意到他的结果，而他们本来是肯定会赞赏

的。此外，战争还使他不能受到李特尔伍德的指导，而这一点本是他希望得到的访问英国的最大好处之一。所有这些都将过去；尽管如此，我完全有把握说，拉马努金已经丰厚地回报了对以他在印度的工作为基础的全部期望，并且已经表明他具有种种非凡的能力，其引人注目的程度不下于任何一个在世的数学家。

哈代自谦对拉马努金工作的论述“必然是管中窥豹”，他为此抱歉。他接着说：

但是我希望，我已足够充分地使人对他的个性与能力有了点印象。近年来，印度产生了许多有才能的数学家，其中许多人来到剑桥，并在学术上崭露头角。他们首先会承认，拉马努金的工作是属于另一等级的。

上年12月，英国、澳大利亚和新西兰军队在加利波利遭到惨败。德国潜艇继续对协约国船只血腥攻击，致使沉船数与日俱增；机关枪在法国响个不停。到了年底，报纸上公布的伤亡名单有时达每日4000人之多。

对于拉马努金，1916年年中的前景本是再光明不过了。但是，他最终同样也会被这场战争击倒。

## 第七章 英国的严寒 (1916~1918)

### 1. 高 桌 子

在战时英国表面上似乎平静的生活中,拉马努金的神经一直绷得紧紧的,以至过于敏感,使他那本来就很脆弱的心理平衡常系于一发。

大概是在 1916 年初,拉马努金得知他的朋友查特吉即将结婚,为了庆祝,拉马努金请查特吉和他的未婚妻来吃晚饭。那时查特吉 21 岁,来自旁遮普邦,拿印度政府的奖学金在剑桥学习。

在印度时,拉马努金从来没有做过饭,甚至都没进过厨房。但是在这里,妻子和母亲都不在身边,又不相信学院厨房所做的素菜真是素的,他就只好学着自己做了。有时在星期日,他请几个印度朋友过来吃他做的南印度风味的饭菜。一个朋友后来回忆说:“味道不错。”还有一次,南印度一家出色的英文报纸《印度教徒报》的老板兼主编卡斯图里兰伽尔·耶恩伽尔去剑桥看望他后,不吝言辞地称赞他做的 *pongal*——一种用扁豆和米做的食物。

这时,他觉得自己的手艺已经很可以了,为了表示对查特吉和他的未婚妻的敬意,就开始为他们准备一次盛宴。

那一天,查特吉带着两位女士出现在主教宿舍拉马努金的房里,一位是他的未婚妻鲁德拉(Ila Rudra),当地一个师范

学院的学生,另一位是来自海德拉巴的30来岁的查托帕迪雅哈(Mrilani Chattopadhyaha)女士。这位女伴当时在剑桥纽纳姆学院攻读伦理学,后来在印度劳工运动中崭露头角,还为不可接触者办了一所学校。

客人们入座了,房里充满烹调南印度食品的香味。拉马努金上了汤,一切都顺利。

过了一会儿拉马努金问道:“朋友们还愿意再来一点吗?”他们都表示愿再吃一点。

然后,再加一点如何?查特吉显然接受了,但是他的未婚妻和那位女伴这一次谢绝了。晚餐上的聊天仍在继续。

突然他们感到不对劲,发现房里只剩下他们三个人,四处张望,看不到主人的踪影。拉马努金哪里去了?

三个客人等了大约一个小时,最后查特吉下楼、出了门,穿过大厅进了大庭院,再穿过铺着石块的院子去问守门人,拉马努金到哪里去了。结果,查特吉被告知,拉马努金已经雇了一辆出租车走了。

他心烦意乱,只好回到拉马努金房里去和别人坐着一起等。到了10点钟,客人们非走不可了,拉马努金还是没有出现。

第二天早上查特吉去查问,他还是没有回来。一连四天,杳无音信。他越想越怕,到了第五天,忽然收到拉马努金从大约80英里(约130千米)外的牛津打来的电报,问查特吉可否电汇5英镑给他?大约相当于今天的三四百美元。

汇款后第二天,拉马努金回到了剑桥。他告诉查特吉:“小姐们不肯吃我做的东西,使我感到大失面子。只要他们还在我的房间里,我就不愿回来。”他要走得越远越好,越快越好;就他身上那点钱,只够走到牛津。

一旦他认为自己是受了屈辱时,就会这样冲动。10年前

也是这种冲动曾把他驱赶到维沙卡帕特南。那次是由于一个人做了一个轻率鲁莽的手势。

在各种场合，拉马努金尽力调整自己入乡随俗。在数学上，他完全没有辜负哈代、李特尔伍德、内维尔和其他英国朋友的期望。在社交上，至少在一开始，他似乎也能适应。内维尔曾谈到他很喜欢说笑话，讨论哲学和政治，内维尔还赞美地谈到他的单纯和“出自本能的尽善的仪态”。

但是拉马努金的内心情感，却像是一本只有支出没有收入的账本。研究数学消耗了他极大的个人能量；再就是调整自己适应英国的新生活。任何一个试图穿过别国文化屏障的人都能体会到这一点。两者一起使他心力交瘁。最后，这个账本也就会空了。

1916年的某一个时期，大概就在宴请查特吉的这个时候，这个账本空了。种种力量组成一个阵势，使他的神经几近崩溃，体力不支，而且在社会上完全孤立了。其实，他为查特吉和他的未婚妻做的那一顿晚餐，对他自己的分量之重远远超过对于他们。因为拉马努金和哈代以及三一学院的其他研究人员不一样，通常从没有人陪同吃饭。

学院的研究人员吃饭时穿着黑袍子院服，列队进入点着蜡烛的大厅，高高的天花板装饰着木框网格。德赖登(John Dryden)、丁尼生、牛顿、萨克雷、培根，还有其他出身三一学院的大人物似乎都从他们那挂在墙上的画像里盯着你看。镶着银边的光木桌子，和平时期原有的桌布都撤掉了，怕它们的反光会招来德国的齐柏林飞艇。当所有的研究人员都坐下了，其最资深者坐在桌子一端，先背诵一首拉丁文颂诗，然后开始进餐。

这就是所谓的“高桌子”(High Table)。这个名称的来由

是，研究人员进餐的桌子放在地板上一个高约 4 英寸（约 10 厘米）的平台上。在三一学院，和在剑桥其他地方一样，这就是学院社交生活的聚焦点，统治着它的是一个年代久远的关于什么是高尚言谈的规范。

一条不成文的规范是：不可过于严肃。李特尔伍德说：“如果一个人冥思苦索了一天，那么他在这时就不应再去谈工作了。……晚餐时的谈话，其实是很随意、很放松的，没有明确规定什么问题不让谈；不过在这种不同学科领域的学者济济一堂的场合，我们不谈本行的事。还有，谢天谢地，我们不谈政治上那些重要的但是烦人的事。”这不是一个讲究深刻性的场合，而是要机智、潇洒，还要放松——从翻译古希腊典籍、写作关于君士坦丁堡的陷落的论文、证明数论的新定理等等高度紧张的学问中解脱出来。在这里重要的东西都要忘掉，这里是零星小事的天地。

有一本保存多年的小书，从那里可以看出这一点。书上记载的是有关高桌子的饭菜的建议和批评。诸如 1909 年哈代和好几个人都说菜单上再不要列入柏林布丁和赫希荷恩果馅油饼了；他与李特尔伍德一起为梅子布丁加酒和一种调味汁奔波，反对那些主张取消这道菜的人；过了几天或几周，就会为了这个问题形成一帮，达成妥协。另一次哈代又对水果馅饼该不该吃热的发起一场争论，同意另一位老兄提出的：“吃热水果馅饼的男人不宜入上流社会。”

这是很有趣很友好的晚上，可以放松白天紧张孤独的工作。李特尔伍德在参军前多年来都是其中一分子，还有内维尔，当然也少不了哈代。这种轻松机智的应答，他真是发挥自如。在战时，属于医院的和驻在学院内的军官也参加了，可能也有几个印度人参加，但是没有拉马努金。对于他来说，到大厅吃饭，是三一学院生活中绝对与他无缘的事情。

侍者在吵吵闹闹的大厅中忙碌着，不停地问：“要羊肉吗，先生？要牛肉吗，先生？”

拉马努金是一个非常严格的正统素食者——如果说是在整个南印度，至少在英国的印度人中，他是数得着的严格。飘洋过海他已违反了婆罗门的戒律，他不得不剪去了脑后的那一束头发，他大多数时间穿着鞋子和西式衣服。他答应过母亲，他将严格遵守婆罗门生活中最中心的戒律，即关于食物的戒律。

有这样一个故事，说是一个饿极了的婆罗门向路遇的一个人要食物。他不知道这个人的种姓和品格，但是他太饿了，顾不了那些。填饱肚子后，他又往前走。几分钟后，到了一个婆罗门的家里，并且就在这家住下。那天晚上，他发现主人家有一尊金像，他十分想得到它，于是在夜色掩盖下把它偷偷拿走了。第二天，他良心发现，强烈的负罪感使他又回到这个房子去还金像。主人说道：“喔，我早知道你偷了我的东西，你看，我昨天就看见你从一个人那里拿食物吃，我知道那人是一个小偷。”

正是这样一种精神融入了婆罗门的食物戒律中——您从谁手上接受食物可是非同小可，谁知道那个人今生或前世犯过什么罪呢？

在遵守这些戒律的细节上，婆罗门自然也是因人而异的。有些人断然弃绝葱和蒜，他们的理论是：葱蒜会激起性欲；另外一些人甚至把这种戒律推广到白菜和土豆。拉马努金吃什么不吃什么，各人说法不同。有一个朋友说他吃鸡蛋，另一个说不吃；有人说他不吃葱，甚至土豆也不吃；但是所有的人都记得他遵守这些规矩是绝对严格的。

在他旅居剑桥早期，曾有一两次在学院厨房里点过炸土豆。另一个印度人也是一个泰米尔婆罗门，开玩笑说：“是羊

油炸的”，想逗他生气。就因为这句话，不管土豆是否真是用羊油炸的，反正拉马努金后来再不点学院的菜了。

于是，他在那间开着小窗子的小凹室里自己做饭，就在客厅的一角，有电和一个小煤气炉。如果能找到原料，他就吃他在印度吃过的东西——有米饭、酸奶、水果、辛辣的胡椒汤*rasam*，还有一种浓浓的很多香料的蔬菜加土豆炖的食物*sambhar*。他的朋友马哈拉诺比斯还记得他在小炉子上炒菜的样子。多数情况下都是他一个人做饭吃。

拉马努金从自己房间的窗子望去，越过邻近建筑的屋顶，可以看到学院大厅陡峭的尖屋顶。在那里，1916年漫长冬天的晚上，高桌子上的烛光闪烁，谈话声此起彼伏，但拉马努金从未享受过这一切。

## 2. 一个印度人在英国

来到英国求学的印度人在异国他乡感到孤单，拉马努金并不是第一个。甘地，后来的非暴力使徒，印度独立运动的领袖，在拉马努金出生的1887年来到英国，他后来这样写道：

我的思念难断，母亲的爱萦绕心头；到了深夜，我泪流满面，乡思使我彻夜难眠；我无法向别人倾诉我的痛苦。即令可以，又复何用？一切都难慰我心。每一件事——人们，其举止，甚至衣着对我都是如此陌生。对英国的礼节，我全然生疏，只有自己时时当心。

从1892年到1906年，剑桥每年约招收20名印度学生，到拉马努金时稍多了一点。任何时候，在英国总有1000多印度学生散于各个学院。人数之多及其所面临的适应英国生活的问题之大，促使英国政府在1907年、1922年以及后来专门作了研究。这些学生反复提出的问题，也是百余年来印度人尤

处不讲的英国人令人恼怒的矜持和冷漠，以及拒人千里之外的态度。

毋庸讳言，有些就是直截了当的民族偏见。因为如此普遍，传言连拉马努金的母亲也知道了。但更经常的是因为英国人特有的矜持，使印度人感到茫然无措。1922年的利顿印度学生委员会(Lytton Committee on Indian Students)报告中就说：“必须承认，英国和印度学生各有其种族特性，这是他们亲密相处的主要障碍。”从印度人方面来说，对于自己正在受人照顾，得人恩惠的一切暗示都极为敏感；“而就英国人方面来说，则过于矜持，甚至与本国人交友也颇不易，而陌生人欲与之交往，他们常怀有戒心。”

经过多年的观察，一个学生得出结论：“首先的难处是打破英国人的矜持。他们虽然举止正派，但却冷淡，流于形式，缺少热情，谦虚礼貌极其得体，却又总是保持距离，不愿他人涉足其间。”

更晚一些时候，一位学生抱怨说他不得不准备一大堆“请”(please)和“谢谢”(thank you)。在他看来，这简直是一种原始的以物易物：你给我一个东西，我一定得还你一个 thank you。然而更糟的还在于英国人的冷漠。有些印度人已经开始接受甚至信奉它，名曰“尊重隐私”；但是大多数人干脆认为这是冷漠无情。英国人谈起话来，似乎滴水不漏，无懈可击，又似乎总是无动于衷，小心翼翼地传递一个明确的信息：他丝毫没有轻视您。一个印度学生曾梦到自己死了几个星期，尸体已经开始烂了发臭了，别人还不知道。内维尔想到了一件事：“我们中间谁也没有追问过(拉马努金)1913年不愿到英国来的真正原因。”认为这是“他的英国朋友们保持缄默的典型表现”。

这种特质在贵族阶级中尤为普遍，在第一次世界大战前

的上议院中，一个成员会感到“人与人相互隔绝到了彼此漠不关心的程度”；另一位则抱怨“成员之间深刻的彼此厌倦”。一位后来访问英国的印度人乔杜里写道：“一天晚上在一个俱乐部吃饭时，我毫无恶意地试着和坐在桌子对面的人开始交谈，我真佩服他的技巧，把我的冒犯挡了回来，而一点也不暗示我是失礼了。”但是，确实挡了回来。

印度人回想起，在自己家里，人们会来串门，坐下来谈话，要不了5分钟就知道你的一切——结婚没有，有没有孩子，是哪里人，做什么工作。而在英国，这些归来者会告知他们的同胞，正式的介绍是极为严格的。在印度流传一个故事，说是一个游泳者在大声呼救，人人都冲上去帮忙，只有一个孤独的英国人坐着无动于衷。后来当人们问他为什么不去救人时，他回答说：“啊？难道我们已经相互介绍过了吗？”

剑桥又以它自身特有的冷漠淡然而自傲。一本为留英的印度学生写的书讲到甚至学院的看门人在执行自己的职守时“也绝不关心新来的人，表现出一种冷漠的神情”。拉马努金的导师巴恩斯的一个学生曾把巴恩斯与剑桥其他导师区分开，因为那些导师给人“一个印象，即别人对于他们都无足轻重”。

哈代与李特尔伍德在剑桥的两位同辈数学家的儿子劳伦斯·杨曾说起过，当李特尔伍德作为一位老人去威斯康星看望他时，他想带李特尔伍德去湖上划船看日落。李特尔伍德没有说什么，而杨猜想他可能是有点厌烦；但是当有一天杨说湖上风浪太大不宜游玩时，“他的脸板下来了……我赶紧迅速地看一下湖面，说是风平浪静。这是典型的剑桥派头——您说过要做的事，就应该去做，要么就干脆别说。”李特尔伍德曾说：“当您在三一学院选拔研究助教会上发言时，决不要期望别人抑制不住的鼓掌，谁都不会眨一眨眼。”

在每个人的情感四周都似乎围了一堵墙，每个人的感情都被一大片沉默包起来了。在剑桥，人们看重思想、事件、事物、工作乃至游戏——似乎是看重一切东西，惟有个人的深层世界除外。

一开始，拉马努金似乎对英国人这种怪癖吃惊，正如西方游客对于无人照看的牲口在德里或马德拉斯街上乱走感到奇怪一样。他不是那种很快就能接受外国方式的人，他宁可远离这一切。他是顽固的自行其是的人。哪怕是细枝末节，他也固守其本国的习俗。他和马德拉斯的有些知识分子不同，从未在印度经历过西方生活，他是地地道道的贡伯戈纳姆的儿子，他始终坚持一个印度人对父母的意愿所深深怀有的服从。当头上那一束头发被剪掉时，他大哭一场。在英国，他坚持素食，房里一直挂着一张印度神像，每天早上都要十分规矩地做婆罗门仪式。他换上一件洁白的祭祀用的新围腰布，在额上点一个婆罗门的种姓记号，做完祈祷再擦掉。只在他要出门时才穿上西服。

即使他没有整日沉溺于乡愁，有时一点小小的暗示南印度生活中熟悉的事都会引起他的浮想，想起住在萨兰伽帕尼·三尼第街上母亲烹调食物的气味，或者马德拉斯街上飘着的烧牛粪的气味；在贡伯戈纳姆街上五光十色的宗教节日的游行，伴随着音乐家错落有致的奏乐声和铃声；高韦里河边穿着红色、橙色莎丽的妇女，田野里身着白袍的劳动者，映衬着深棕色的皮肤；青翠欲滴的蔬菜、椰子、香蕉和芒果在河边市场上出售，还有永远是蓝色的天空和当头的烈日。

拉马努金身处英国人中老忘不了自己是外国人，他的如音乐般的乡音对英国人的耳朵是异样的，他的肤色比英国人黝黑得多——尽管英国人的双颊因冬季的严寒冻成玫瑰色或粉红色而不再是“白”的。这里处处是大教堂或小教堂，基督

十字架和耶稣基督像。在这块陌生的国度里,一家人分散各处,孩子们不尊重父母,而在印度这可是社会生活的准则。而且此时,整个剑桥都回响着走向异国的征战步伐声。

甚至处处都弥漫着英国人的体味也使得他百思不得其解。有一个传闻说,直到有一天他在一个聚会上才懂得其中的道理。一位妇女抱怨这是由于工人们不大洗澡的缘故:有时一周还洗不上一次。当这位妇女看到拉马努金面有鄙夷之色时,马上向他解释,他所见到的英国人肯定每天都洗一次澡。他问道:“您是说他们每天只洗一次澡吗?”

拉马努金不善于应变。有些人能很容易改变自己以适应外国文化,他们很能入乡随俗,不费力地融入英国生活。他可不是这样的人。对于英国人日复一日地让他在一些微妙事情上稍遇挫折,他都很难释怀。被人拒诸门外或矜持傲慢的目光都使他受不了,这些都妨碍了他应有的充满阳光的开朗心情,而使他迅速地躲进数学研究的安乐窝中。

他似乎就是这样做的。他退却了。“我记得那几年的他,但是我从未和他谈过话”,威尔逊后来这样回忆,“事实上人们极少见到他”。他可以一连好几天不出房门。在印度,他喜欢在凉爽的深夜工作,逃避正午的炎热。现在尽管不热,他还是孤独地深夜工作。

拉马努金并不是第一个在一个新的国度里退缩到自己蜗壳中的外国人;事实上,他的反应是典型的而非例外的。后来有一份关于在英国的亚非学生的研究报告说,一种被排斥“在社会生活之外的感觉……成为他们面临的最严重问题之一,……[而且产生了]严重的心理后果”。另一项关于印度学生的特别研究指出,在印度,有 83% 的人大体上每天见一次朋友,而在英国则只有 17%。

1916 年复活节学期,哈代是三一学院周日散文俱乐部成

员，内维尔和罗素都是，但拉马努金不是。哈代打网球，而且在战时的英国还可以玩板球，拉马努金只能一成不变地伏案工作。有的朋友参加了印度学生辩论协会（据说在那里“好几代印度贵族子弟接受了民族主义和激进主义”），拉马努金也没有涉足那里。1916年10月30日，拉马努金关于一类丢番图方程的论文在剑桥哲学会上宣读，但是是由哈代而不是他本人去宣读的。当哈代在伦敦数学会1917年1月18日宣读他们两人合作的一篇论文时，李特尔伍德、内维尔都去听了，布罗米奇也去了——但是拉马努金没有去。

在主教宿舍里，拉马努金就这样把自己关闭起来。

从他睡觉的屋角处一个小小的向西的窗口，可以看见新庭院的哥特式窗子和石墙，相距不过数英尺。东边的窗子里还可以照进没有被其他建筑物挡住的一点阳光，英国的天空总是臭名昭著的阴沉。邻近圣诞节，剑桥——其纬度之高已相当于加拿大东北部的拉布拉多——下午4点天就黑了，即使在长长的夏日，按马德拉斯的标准来看，也是没有阳光的。一个典型的例子是，7月份倒有12天在下雨。

战争使情况更糟，剑桥和周围的东英吉利地区，伸向北海靠近欧洲大陆，特别暴露在德国齐柏林飞艇的威胁之下，为了保卫国王学院的小教堂，军队在街道上实行了灯火管制。还有人记得，剑桥“在整整三年里被一种中世纪式的幽暗包围着，人们在街上只好尽力摸索着走路”。如果说英国的街景本来就灰暗凄凉，现在则成了黑黢黢的，只好把人逼回房子里去。

在南印度，室内室外的界限本不如在英国那样固定不变；在英国您总想躲避严寒，在南印度，墙和窗子都透风。小虫、气味和声响都可以从外面传到里面。小松鼠和蜥蜴可以从百叶窗钻进来。而在剑桥，在那些有500年历史的石墙的坚固

的永恒中，永远存在着某种分界与隔离的感觉。

所以，特别是在冬天，拉马努金的公寓简直就像监狱，虽然是一种用毛线隔出来的“监狱”，但总还是一种“监狱”。一方面，他是被英国人的矜持、冬天的严寒和漆黑的街道以及战时的凄凉驱赶进来的；另一方面，他也是被与哈代合作带来的喜悦诱惑进来的。

### 3. “一次特别愉快的合作”

数学家维纳有一次注意到数论如何在一定意义上模糊了纯粹数学与应用数学的界限。在寻找纯粹数学的具体应用时，人们所举的例子通常会涉及物理、热力学和化学，但是数论专家面前总有一大堆来自现实生活的问题——即数系本身，它是无穷无尽的原料之泉。正是在数论中，维纳写道，“具体实例出现得最频繁，它里面有非常具体的问题，很容易陈述，但需要有大能力的数学家用高超的技巧来求解。”

1916年在数论领域中就有这样一个问题：称为“分划”问题。

从表面上看，这个问题简单到小学一年级水平： $2 + 2 = 4$ 。但这只是把整数加起来得出4的一种方法。还有其他方法，如 $1 + 3$ 或 $1 + 1 + 2$ 或 $1 + 1 + 1 + 1$ 。最后，若苛求完全性，单写一个4也是办法之一。这些（如果不考虑同样数目重排次序）是把整数加起来得出4的仅有的办法，一共是5个不同的方法，就叫做5种“分划”；数学家就说4的分划数是5，记作 $p(4) = 5$ 。

一般说来， $p(n)$ 表示任意一个数n的分划数，称为分划函数。数学家就想，关于它有些什么可论述的？对于任意的n怎样去估计它？

从原则上说,对任意数,不难穷尽所有可能性并将其累计起来。但这只是从原则上说。问题在于分划数增长极快;例如3的分划数 $p(3)$ 就是3(即:3,1+1+1,1+2);而数字10就有 $p(10)=42$ ;而 $p(50)=204\,226$ ,即有204 226种不同的加法。把这些加法列出来,如果每5秒钟列出一个,一共要列两个星期左右。这才只是 $n=50$ 的情况。所以问题在于能否找到 $p(n)$ 的一个通用的公式,对于您想讨论的任意一个数,该公式都能绕过令人惧怕的算术,直接吐出答案。

和通常一样,欧拉是第一个稍微啃了一下这个问题的人。他从一个后来称为椭圆模函数的领域着手,欧拉为绕过这个问题,先去构造一个生成函数。从理论上说,一个生成函数不仅能对一个特定问题给出特殊答案,而且能对一切相关问题给出所有的答案;只要把一个数塞进去,它就立刻生成答案。有了它您就走进了一个新的数学领域,这时注意焦点似乎不再是 $p(n)$ ,而是一个新函数 $f(x)$ 。只不过,一旦 $f(x)$ 在手,就可以回过头来得到您真正想求的 $p(n)$ 。在这种情况下,欧拉的生成函数是一个“幂级数”,也就是一个级数,其各项是越来越高的幂,每个幂各乘以一个系数,即:

$$f(x) = 1 + \sum p(n)x^n$$

这个式子的意思是

$$f(x) = 1 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \dots$$

正是这些系数 $p(1), p(2)$ 等等可以给出答案。因为一旦您真能算出这个幂级数,其系数就不会是什么别的数而恰是所求的 $p(n)$ 。按欧拉的格式,例如您想算 $p(50)$ ——它是204 226——您只要找出这个级数的第51项\*,并注意 $x^{50}$ 的

\* 原文误为第50项,第1项是常数项 $p(0)=1$ 。——译者

系数。所以如果您做对了，级数的这一项就应该是

$$\cdots + 204\,226x^{50} + \cdots$$

这不是巫术，分划的生成函数是幂级数，这是很自然的。因为幂级数相乘时，其幂指数是相加的，所以  $4 \times 8 = 32$  可以写成下式

$$2^2 \times 2^3 = 2^5$$

其中我们看到指数正是相加的。分划需要的正是加法。（哈代在追述幂级数与分划的代数联系时说：“稍想一下即知， $n$  的每一种分划相当于把一个 1 加到  $x^n$  的系数上去。”）然后，只要看上一眼，甚至不必追寻逻辑细节，就已能粗略看出联结这两个表面上互不相关的领域的路径了。

无论如何，这就是欧拉提出问题的方式，但欧拉并未解决这个问题，并没有说出怎样用他的生成函数来实际作出所需的幂级数。他提出一个得出  $p(n)$  的策略，但更具体的就没有了。正如哈代和拉马努金在他们发表于《伦敦数学会会刊》上的大文章所说：“我们在有关这一主题的文献中找不到关于  $p(n)$  大小之阶的任何暗示。”换言之，谁也没有线索。

拉马努金和哈代攻克这个问题的起因，可追溯到 1913 年 1 月拉马努金给哈代的第一封信。在这封信的第 7 页，他作出了一个特殊的  $\theta$  函数——这是一类幂级数，但其各项的幂指数都是平方数，例如  $x^1, x^4$  和  $x^9$ ——并由此宣称，为了估计系数，只需计算他提出的数学式子，并找到最接近它的整数。

这并不完全正确，哈代写道：“这个函数是对系数的一种真正的逼近，但不如拉马努金设想的那么近。”然而，他继续写道：“拉马努金这一宣称虽然有误，却是他历来做出的最富成果的一个，因为它最终引导我们合作做出了关于分划问题的全部工作。”的确，拉马努金的函数和在 1937 年这个问题的最终解决十分相像，如出一辙。

拉马努金和哈代的工作发展成后来所谓的圆法。圆法要用柯西定理，而乍一看又与他们的工作作风马牛不相及。柯西定理属于“分析”的广阔领域，其中也包含微积分，是处理“连续”量而非“离散”量的。譬如说，一个妇女怀孕了多长时间，这是一个连续量，而她生了几个孩子则是一个离散量。同样，对分划而言，不可能有 6.719 个分划，正如不可能有 6.719 个孩子是一个道理。要么是整整 6 个，要么是整整 7 个，或者是别的整数个。

但是把柯西定理应用于此类问题已有一段历史了，这应该感谢哈代。他是 20 世纪开创“解析数论”的最重要的数学家之一。解析数论把 200 多年来为连续量发展起来的有力工具，通过种种数学高招，应用于数论中的离散量。在概述他和拉马努金的共同工作时，哈代提到：“[使用柯西定理]这一思想是极为显然的，正是这一思想统治了现今解析数论研究的十分之九。奇怪的是，为什么过去一直没有把这一思想用于这个特定的问题。”他继续说道，其所以没有使用它，部分是因为“在单位圆的某一点附近，生成函数  $f(x)$  的行为极其复杂”。

哈代讲的是这一事实：柯西定理的核心是一个积分，而在单位圆周上这个积分是不能估计的，因为在积分“路径”上有许多不许可的点，而积分在那些点上是没有定义的。所以他们需要找一个接近于禁用的“单位圆”的路径，系统地加以分段，而且一段段地作近似，这就是新的策略。

把一个结果放在一连串的近似上，似乎只能保证也只是得到一个近似值。能否期望一个更好的结果？准确计算素数的一切努力不是都失败了吗？数学家们只能满足于一个粗略的估计，而这个估计当  $n$  增加时变得相对地更为准确。拉马努金想使素数定理成为准确的企图，不是终于陷入数学的陷阱之中了吗？可以肯定“分划”问题会同样难以对付。只要有

稍微像样一点的近似就足以使他们很高兴了。

为了看清楚他们究竟还差多远——检查一下他们的近似有多大价值，与精确的结果多么接近，他们就请数学家麦克马洪少校来一起干。

麦克马洪少校是一位准将的儿子，全名 *Percy Alexander MacMahon*，那时已 61 岁，曾在皇家炮兵中服役。19 世纪 70 年代还在马德拉斯干过一段时间，以后才认真地从事数学。“由于他的大胡子，他的‘英帝’派头，最糟的是他的军事背景”，后来有人写道，“很难设想上帝会让麦克马洪去扮演一个大数学家的角色。”离开军队以后，他又成为伍利奇军校的教授；1904 年去剑桥圣约翰学院。他的专长是组合学，这是一门与掷骰子有关的正经学问，他的贡献极有独创性，故于 1890 年当选为皇家学会会员。麦克马洪做起计算来快如旋风。有时他会找拉马努金来一番友好较量，而且一般地说，每次都是麦克马洪胜。

现在，麦克马洪的计算技巧可派上了用场，他直接用欧拉关于分划的早期工作所得的简单公式，在一串无穷无尽的数字中历尽艰辛，用手工算出前两百个  $p(n)$ 。作一个最粗略的比喻，他以 1 000 001 个 29 相加来计算： $29 + 29 + 29 + \dots$ （共 1 000 001 项），得出 29 000 029，而哈代与拉马努金则用乘法去计算  $29 \times 1 000 001$ 。当他们两人还没有算出  $p(n)$  的值时，麦克马洪已经给他们提供了一个标准，这样，当他们算出  $p(n)$  时，就可以与此标准相对照，看一下自己的结果对不对。

在这项工作的开始阶段，他们的近似策略还很原始，但是这样一试，就发现结果之好令人鼓舞；算  $p(50)$  和  $p(80)$  时，误差只有 5%，进一步改进以后，误差更小了，这使他们坚信路子是走对了。

到 12 月之前，这两个人可能是分开工作的，直至大斋节学期于 1 月开始时，得到一个大进步。拉马努金给哈代寄了

一张明信片，在这个很小的空白里，对他们不断进行着的数学对话，又作了一个贡献：

为使  $p(n)$  是与近似和最接近的整数，看来  $s$  应不大于  $\frac{\beta\sqrt{n}}{\log n}$  而不小于  $\frac{\alpha\sqrt{n}}{\log n}$ 。我希望您能够容易地证明这些，这样问题就完全解决了。承麦克马洪少校好意寄给我一张打字机打好的 200 个数的表。近似式给出了精确的数值。我想您已从他那里知道这件事了。

拉马努金暗示一种方式，即用于近似计算  $p(n)$  的级数，应该用多少项，这与  $n$  有关。关于这一点，后来李特尔伍德写道，这是“很了不起的一步，涉及一个新的更深奥的函数论的方法，显然仅靠拉马努金一个人是不可能发现的”。如哈代和拉马努金所说，这似乎意味“无论如何，我们可以合理地期望，能够找到一个公式，其误差之阶小于  $e^{an}$  类型的任意指数的阶；例如，可以是  $n$  的某次幂的阶，或者甚至可以是有界的”。

误差有界，即误差可以置于一定的界限之内。至此，他们就大可高兴了，而结果还要更好：

我们进而用麦克马洪少校盛情惠寄的数值结果来检验这个假设时，发现真实的值与近似值相近之准确令人惊讶。这样我们希望还可再进一步，取  $n = 100$ ，我们的公式之前 6 项分别给出：

$$\begin{array}{r} 190\ 568\ 944.\ 783 \\ +\ 348.\ 872 \\ -\ 2.\ 598 \\ +\ .\ 685 \\ -\ .\ 318 \\ +\ .\ 064 \\ \hline 190\ 569\ 291.\ 996 \end{array}$$

而实际上  $p(100) = 190\,569\,292$ ，所以取到第 6 项时误差仅为 0.004。<sup>\*</sup>

计算  $p(200)$  之精确性也与此类似。他们的方法给出的答案误差不仅是“有界”——有界还有可能很大——而是小到经过舍入即得最接近的整数。哈代和拉马努金写道：“这些结果，非常有力地表明，可以得到  $p(n)$  的一个公式，不仅给出其阶与构造，而且可用来对任意  $n$  计算其精确值。”

这真是惊人之举。在这个问题的进展过程中，以及在关于素数的工作中，他们从未料及会有如此的结果。他们在分划问题上所得的成就，正是拉马努金曾以为自己在素数问题上早已完成，而被哈代指出尚待解决的那些问题。更有甚者，他们所得结果的神奇的准确性，证实了他们用以得出这个近似的方法之高明。这个方法称为圆法，它允许您靠近那个禁用的圆形路径，仅距秋毫之细而又未曾触及。这个近似公式是如此不可捉摸而又令人鼓舞，使人感到它早已超越了近似，很可能是精确公式。20 年后，德国数学家拉德马赫 (Hans Rademacher) 补上了这个拼图板缺失的那一块，从而使这个公式最终成为精确的公式。

拉马努金不是早就想到过有一个精确公式吗？著名的挪威数论专家塞尔伯格 (Atle Selberg) 如是说。塞尔伯格一直认为，事实上，正是由于哈代坚持要用经典的分析方法，而妨碍了他们的工作；哈代对拉马努金的直觉缺少信心，致使对寻找精确解气馁，一直等到 20 年后拉德马赫才完成了这个工作。

无论如何，他们关于分划问题的解是一个大新闻，他们为此所用的圆法也获得了令人目眩的成功。1916 年末，哈代迅

\* 原文如此。但按前面给出的 6 项实际计算的结果是 190 569 291.488，与  $p(100)$  相差 0.512。——译者

速以个人名义在斯德哥尔摩的第四次斯堪的纳维亚数学家大会上作了一个初步报告。他特别说明“这是著名印度数学家拉马努金和我的共同工作”。第二年初，又在巴黎科学院院报《综述》(Comptes Rendus)以“ $n$  的分划数的一个渐近公式”(Une Formule Asymptotique pour le Nombre des Partitions de  $n$ )为题，用法文发表了两人署名的简报。3月份又在《伦敦数学会会刊》上发表了这篇法文文章的一段引文。直到1918年才发表了长达40页的关于他们的工作的全文。

拉马努金和哈代，作为一个数学组合使美国宾夕法尼亚州立大学的数学家安德鲁斯联想到两个人的故事：这两个人一个是瞎子，一个是跛子，合在一起就能完成通常人做的一切事。这是使人敬畏的一对，仅就关于分划问题的工作而言，就足以证实拉马努金的英国之行是值得的。他们的合作使这两个人的名字在数学史上永远连在一起。

剑桥的数学家博洛巴什(Béla Bollobás)评论说，尽管哈代提出了攻克这个问题所需的数学技巧，然而：

我相信不只是哈代能做到这一点，可能莫德尔也做得到，波利亚也可能做到，我确信颇有几个人能起到哈代的作用。但是拉马努金在这对伙伴中的作用，我认为在任何时候都没有人能代替。

不论荣誉应如何分配，“我们把这个定理”，李特尔伍德写道，“归功于两人的一次特别愉快的合作。两人禀赋各不相同，在整个工作中，各自都贡献出自己最好的、最具个性和最拿手的本事。拉马努金的天才值得以此工作来表现。”

对于拉马努金，这一切都是如此甜美，上了瘾似的。10年前，他得到了卡尔写的书，使他一门心思只钻研数学，以至不能成为一名普通的大学生。现在这个瘾又在起作用了，更

是一发而不可收了。现在推着他搞数学的,不只是他对数学的爱好,还有哈代给他的鼓励。哈代是西方数学传统最高最好的体现者,他有高超的技巧、出众的才能,对英国和欧洲的数学领域有着广博的知识,拉马努金能够要求于他的同事和导师者,已莫过于此,哈代又在他身上发现了令人敬畏的独创性,所以再也不能抑制拉马努金与他共同工作的热切心情了。

斯诺曾这样形容哈代:“能如此彻底地摆脱了人生的种种卑鄙狭隘的性格……是心地最高尚的人。”在另一个场合,他又说哈代是“我所见过的最远离[忌妒]情感的人”。的确,哈代确信拉马努金的数学天赋高于自己,却没有留下任何一丝忌妒的痕迹玷污他们的关系。丝毫没有个人的考虑,他一直是拉马努金真诚的朋友和支持者。终其一生,哈代总是支持他,称赞他的才能。他既已看到拉马努金的天才,他只希望将这份天才推至极致。

如果说还有什么问题的话,问题也就在于此。

哈代在许多方面都是拉马努金的最好最真挚的朋友,对他体贴忠诚而友善。但至少在一点上,虽然出于无心,却可能有害于拉马努金:对他期望过切,无限制地盼望他能尽其潜能——驱赶着他成为名人——这样做,只能使他更加上瘾。

哈代无形中帮助拉马努金掘了一个无底洞,使拉马努金越陷越深而不能自拔。

#### 4. 无 底 洞

哈代确实是一位精神贵族,最看重人的成就,其他任何东西都不在意。作为一个数学家,拉马努金所要的也仅此而已。但他又是一个令人敬畏,高不可及的人,他所要求于拉马努金的永远是最好的,而且只要精华。牛津的经济学家罗宾斯

(Lionel Charles Robbins)这样回忆哈代：“他对于卓越性的感觉是绝对敏锐的；稍有不足的从来不屑一顾。约翰逊博士(Dr. Johnson)关于伯克(Burke)所说的话，完全适用于哈代：‘只要他站在您面前，您就得使出全部力量来。’”

1919年进剑桥的大学生伯基尔(J. C. Burkill)，后来也是一个著名的数学家，回忆道，自己在哈代面前总有一种“低人一等”的感觉。李特尔伍德是充满人情味的，易于接近，在大厅中总是友好地谈笑风生；哈代则处处显得光彩逼人，“只要他在讲话”，伯基尔说，“他总是居高临下”。匈牙利大数学家波利亚谈起哈代对于他有一次未能实现一个很有希望的数学思想颇不以为然。波利亚回忆道，他们两人和另外一位数学家一同去参观一个动物园，看见一只熊在笼子里嗅一嗅门锁，又用爪子打它一下，吼两声就走开了。哈代就说：“这熊就像波利亚，有一个美妙的思想，就是实现不了。”

如果您认为别人对您判断不公，可不要去找哈代诉苦。有一次数学家莫德尔写信给他，诉说他的一篇论文，因为有小毛病，被一个数学刊物的编辑退了稿，哈代可不肯为他讲话。“我知道，我花了3个小时看您的一篇短文清样，”他回信说，“在一页之中找出了30多个小毛病，都是‘小毛病’——惟其是小，您才不会注意它们，也不会去加以注释；但我的一个上午可就白费了。”哈代全信11页，都是这些恼怒的话。这封信是说：不要放松您自己。

总之，哈代是一个固执的工作狂，他的人品就是：对人有所期望，要求表现完美，拉马努金从他那里得到的是鼓励，以及按哈代的方式表现的友谊——但决不是无原则的溺爱。

哈代对拉马努金从印度给他的第一封信就表示了同一个要求——要有证明——拉马努金到英国后，他对此从未放松过。有一次他给住在医院里的拉马努金写信谈到他们正在做

的数学工作,哈代讨论数学的急切心情和对拉马努金健康的关怀简直是不相上下:“如果我再得出什么东西,我会立即给您写信。我希望您已经好多了,可以回来了——有一些漂亮的问题要做,我不知道您现在是否已经好些了,可不可以来思考这些难啃的东西?”信后还有一个附言:“现在您必须按医生说的去做,然而您可以多少想一想这些东西:它们非常激动人心。”尽管这封信含混得让人发疯,但如果拉马努金看不出它所含的信息,那就太迟钝了:工作在等着您。

如果拉马努金还多少想放松一下,研究一下他喜爱的哲学概念,研究一下英国物理学家洛奇(Oliver Lodge)的那些使他神魂颠倒的降灵理论,坐火车到伦敦去看看动物园(他去过去一两次),或者用别的方法离开一下数学,都只能得到哈代极勉强的支持。

哈代的激励肯定会使拉马努金更加痴迷他的志趣。他写信给哈代说,他所住的医院很冷而且令人不舒服,可是——

浴室很好而且暖和,我将每天带着纸笔去浴室一小时左右,这样很快会寄给您两三篇文章。我以前没有想到这个主意,要不然我早就写好一些东西了。一周或再多几天,医生就会来埋怨,说我不应该每天都洗澡。但是我先向您保证,我可不是去洗澡而是去写文章。

拉马努金因病住院,可还在向哈代道歉说他的数学做得太少了!

拉马努金 1909 年结婚后,就把自己和广阔的社交界缝合起来了。现在,在英国,这些缝合的线再次被切断;到 1917 年早些时候,他已经是一个有使命的人,被推向他命中注定的地方。到剑桥 3 年后,他的生活只是哈代、四面墙壁围起来的房间,再就是工作。他有时会一连工作 30 个小时,然后睡 20 个

小时。什么规律性、平衡性和休息，都已从他的生活中消失了。

他并不是第一个在数学巅峰上奉献自己健康的人——当雅可比的朋友担心他过分献身于研究可能影响健康时，雅可比回答说：“这是必然的，有时候工作过度，确实危及了我的健康，可那又怎么样呢？卷心菜没有神经，没有忧虑，可是它们从它们完美的健康中得到了什么呢？”在雅可比之前还有牛顿。关于牛顿，贝尔说：“牛顿从来不注意自己的身体健康，在他埋头构思他的理论时，似乎忘了他还一个需要食物和睡眠的躯体，他忽略或忘记了吃饭……”

哈代是拉马努金长期寻觅而不可得的智力伙伴。在剑桥，有庄严的石块建筑的小教堂、静寂的庭院和宏大的图书馆，西方文明的全部财富都显现在拉马努金面前；然而他现在却没有了那些在印度维系他的生活大部分东西，而对这一点，他可能还未意识到。他缺少了家庭，缺少了那些黝黑而熟悉的面孔和那些印度人开朗明亮的笑容，没有了那种亲切的泰米尔语的乡音。那些本来在不知不觉中支撑着他的本性和自尊的东西，原本不当一回事，现在都从他身边消失了。再没有人像佳娜琪和他的母亲那样把饭做好，在他工作时送到他手上，没有人招呼他按时睡觉，没有人用凉爽的抚摸去轻轻触动他发烧的额头，或者给他以性的抚慰；没有人劝说他或请求他有所节制，就如叫他不要淋雨那样。拉马努金犹如一匹执拗的纯种马，没有人来洗刷他，喂养他。自从3年前他登上“内瓦萨号”以来，到1917年上半年，一直都没有人这样做。

在学问上，拉马努金犹如回到了自己的家；但是他毕竟不只是一个心灵，他还一个躯体，是由肌肉、器官、激素和神经化学物质构成的复合体。他的躯体有着他的心灵全然不知道的需求。

1890 年，在马德拉斯出版了一本专为印度学生写的书，题为《留英四年》(Four Years in an English University)，作者萨蒂亚纳汗(S. Sathianadhan)是马德拉斯王公学院的逻辑学和道德哲学教授。此书显然是以他在剑桥圣三学院学习的体验为基础，目的是告诉印度学生，剑桥的生活究竟是怎么一回事，而印度学生应该从剑桥学到的是什么。有一点，他描述得十分新颖而且极具启示力，就是英国人对体育和休闲的重视。

一个剑桥人\_Cantab、从剑桥 Cambridge一词的古拉丁语拼法转化而来]从不放弃每天以各种方式运动两小时。我极少在下午还能在室内找到一个学生，不管他多么爱好读书。一个整天抱着书本不放的人必被人们看作不正常，而被其他同学讥笑。——非凡的思想必来自健康的体魄——这是一个普遍认可并身体力行的格言。这些年轻的英国人，对体能与心智的发展同等重视，决非差学生。这些人，每天可以徒步行走 12 英里(约 19 千米)或划船 16 英里(约 26 千米)而毫不困倦，其实他们与德国大学生同样用功。正是从这些身强力壮的青年人中，产生了优等生和第一流的学者。

如果说我们印度学生有什么需向英国学生学习的，那就在于此——对体力与智力的发展必须同样重视。

拉马努金不消说没有这样做，他对体育活动毫无兴趣。如果说哈代还想引起他对板球的兴趣，也是徒劳。他一直很胖，大大地忘记了身体，整天坐着成了病态。但是他不是萨蒂亚纳汗眼中印度学生的典型：“因苦读而形销骨立，满面病容，浑身无力，看上去比实际年龄老了一倍，更像一个住院的病人而不是常进讲堂的人。”

不少在英国的印度学生最终都像是“住院”的病人。当利顿印度学生委员会在 1921 年到 1922 年巡视全国时，听到一个牛津的人指出，印度学生常到第二年结束时就病倒了，这几

乎成了自然规律。这个委员会的证词在解释其原因时贯穿了达尔文主义的适者生存的理念：印度人已适应了本国的环境——炎热的骄阳和辛辣的食物。现在来到英国，他们面对异国的条件，比较差的人不能适应就垮下来了。

且不说这种观点科学上是否站得住，那时民族特性之差别远不像今天这样模糊，这一点可是真的。所以，要适应就得更花力气。印度是印度，英国是英国，泾渭分明。那时不像现在，在牛津和剑桥处处有印度餐馆和食品店。至于天气，那时没有空调与中央供暖来缓和极端的冷热。要么挺住了，要么倒下来。这就是为什么有钱的英国人冬天就到意大利或者西班牙旅行。而在印度，夏天最热的时候，他们就上山避暑，北方到西姆拉，南方到乌塔卡蒙德。那些没法走的只好忍受酷暑，用一把扇子解暑。而在英国潮湿寒冷的冬天，只有靠微弱的煤炉施恩了。

印度学生到英国读书，当然无法逃避异国的不利气候，所以，大家相信健康会受损害。爱丁堡大学印度学生宿舍主任告诉这个利顿委员会，印度学生的健康一般还好；他说，“例外可能是那些来自印度南部的学生，他们由于不适应这里的严酷气候，容易患肺结核和其他胸腔疾病。”爱丁堡皇家内科医师学院(Royal College of Physicians in Edinburgh)院长评论说，在印度学生中肺结核相当普遍，它因气候原因而加重了。其加重还由于另一个事实，用报告中的话说就是：“宗教上更虔信的印度学生坚持他们宗教上的饮食规定——这种生活习惯很不适合他们现在所处的条件。”

拉马努金确实坚持他的“宗教”规定的饮食。甚至在他初到英国，战争还未爆发时，这样做就已经给他带来了问题。他到英国不久后给一个朋友的信中就抱怨：“很难找到适合的食物。要不是这里有很好的牛奶和水果，我就更苦了，现在我已

决定每天自己做一两样吃的，我已写信给家里请他们寄一些必要的东西来。”在别的信里，他有时叫给他寄一些食糖来，有时又叫不寄；因为不是海运丢了，就是东西弄坏了；若收到完好无损的，就道一声谢。纳拉亚纳·耶尔每月用加了金属箍条的箱子给他寄米粉，其他人给他寄香料、腌制的水果和蔬菜。

后来佳娜琪回忆说，在印度的时候，拉马努金有时突然停止吃饭，或者几口吃完，以便继续想他的数学；饭是可有可无的。但是现在没有人给他做饭，这可就麻烦了。从头做起，做南印度的饭——把材料都找来，小豆要泡，要磨，要切菜，要煮饭等等，直到把饭做完——这要花时间。而时间在研究那些世界上最有诱惑力最有挑战性的问题时，他又舍不得放弃。所以许多人，包括内维尔的夫人阿丽斯，都说拉马努金有时一天只做一顿饭，有时隔天才做一顿饭，要做也是在早上这个奇怪的时刻。

最简单的“解决方法”就是某种禁欲主义。原来在马德拉斯，他就喜欢吃芒果、香蕉和木菠萝，与米饭酸奶一起吃。那时还有母亲用特别方法做的茄子……但是，南印度好饭食的日子已经一去不返了。他在 1915 年写信给苏布拉马尼安：“我什么都不需要，因为我已经完全控制了我的口味，只要米饭加一点盐和柠檬汁就行了，吃多久都行。”

这样的饮食吃几天还可以，长久可不成。拉马努金的严格素食是有代价的。如果在高桌子上吃饭，有社交调剂，可以帮助他保持一种比较平稳的生活。可现在是战时了，他的健康必然要受影响。

## 5. “我们这些大轮船”

剑桥的街道是漆黑的，人们的心情是沉重的，战争还在

继续。

当拉马努金 1914 年进入三一学院当研究生时，他的名字和所有三一学院的人们一样，列入了同一本厚厚的人学登记册。在去年才启用的一本登记册的第八页上签上了拉马努金的名字，并在这一页各行上填写了自己的出生地、父亲名字、就读过的学校和其他例行的信息。

但是，今天来查阅这本册子时，就会看到，在拉马努金之后的一页，那填得满满的庄重的行列令人心寒地停止了。第一次在记录中突然出现了空白——一些已被录取进入三一学院的年轻人，在他们的名字下都没有本人的签字。他们都上了前线，从未到达剑桥。一页页翻下去情况更糟，像满口牙齿掉了一半，又像一座被炸的城市，隔一幢房子就有一堆瓦砾。

在许多名字后面还有附加的消息：某某“1915 年 6 月 16 日阵亡”；某某“1918 年 8 月 8 日阵亡”；某某“1918 年 9 月 6 日因伤重去世”。有 20 页是这样的。三一学院人学登记册上的空白就像是阵亡在佛兰德和法国的士兵们的白色大理石墓碑。

大学还是开学的，但它只是过去那所大学的幽灵了。三一学院人员大减，战前招生人数将近 600，到 1916 年 10 月仅剩 47 人。在那时，正如一位在剑桥受训的年轻军官所写的：“大学的脉搏几乎停止跳动；住在校内的除极少数大学生外都是不到服役年龄的孩子、亚洲人以及身体不适合者，即所谓‘婴儿、印度人和残疾人’。”那时真是这样，例如参加 1916 年数学 Tripos 的名单就有特里巴蒂(Tripathi)、马亨德拉(Mahendra)、普洛萨德(Prosad)和萨拉瓦纳穆蒂(Sarawanamutti)这些亚洲人的名字。

战争带着爱国狂热而来，它还不会很快就结束，但由于无止境的伤亡已变得更残酷了。早时的乐观主义退潮了，那种

没完没了不死不活的战壕战代替了烽烟滚滚腥风血雨的阵地战。要在机枪扫射下占领 100 码泥沼可能要伤亡近千人。悲哀愚蠢的战争现实,加上可怕的伤亡报告,犹如一场瘟疫笼罩着全英国。1915 年 3 月第一东部总医院迁出内维尔庭院,搬到国王学院和克莱尔学院后面板球场上的一个临时建筑里,整个 11 英亩地住满了伤病员,这件事必然特别伤哈代的心。

战争影响到一切,《剑桥杂志》(Cambridge Magazine)上登了一则广告:“军靴,欢迎订购”,“最优质行军鞋,存有现货”。物价上涨了,物资短缺了。到 1916 年 5 月,第一东部总医院杂志的封面从棕色硬封面变为不结实的蓝纸。到了 10 月,医院已处理了 33 000 伤亡人员,封面则已如卫生纸了。

“我们从未如本周[的一期]那样登载过如此可怕的伤亡名单”,《剑桥杂志》的编者在 1916 年 10 月 14 日的一期上说:“每一天都有现在还住在这里的人所熟悉的名字出现在官方阵亡名单上。”然后,这份杂志一个学院一个学院地记录阵亡名单:Hopgood, Hudson, Johnson, Keeling, Knight, ……

两星期后,伦敦数学会主席拉莫尔爵士(Sir Joseph Larmor)在任期两周年时向学会致词说:“这是我们骄傲而又悲哀的特权,来回忆那些在我们的科学中耕耘过的人们的名字,他们在民族危亡之际响应国家的号召为国捐躯。剑桥三一学院的学者韦克福德(E. K. Wakeford),我们不少人曾期望他成为几何科学的未来领导人。”

拉马努金的导师巴恩斯,对这种伤亡投以更沮丧更悲苦的目光。在战争快结束时的一次布道会上,他宣布:“我在剑桥的学生至少有一半,而实际上全是最好的学生,都阵亡了,或者终身残疾。我所做的事绝大部分是白费了。”

有时候似乎是每个人都死了,哈代老家的杂货店老板罗伯特·柯林斯(Robert Collins)也死了。

还有炮兵连长格雷厄姆(W. Graham),他5年前在印度马德拉斯行政当局还为拉马努金的优点辩护过。

后来在温切斯特学院,在19世纪90年代哈代踢足球的地方建了一个走廊,纪念该学院的阵亡者,上面镌刻了500多个名字。

伍顿(Barbara Wootton)写的《在我从未建造过的世界中》(In a World I Never Made)说,人们记忆得最清楚的是:

在学院的小教堂和剑桥教堂中无尽的追思礼拜。在某种意义上,使我最伤心的是……年轻人的父亲不顾礼仪在大庭广众之下痛哭失声……按照我们家族圈子的规矩,只有小孩子才能流眼泪的——而成年男子从不……那些我从小就以敬畏之心看待的著名教授们和名流也会当众大哭,这使我深受震撼。

“这里的情况是如此令人悲哀伤心,”三一学院副院长杰克逊在1917年1月25日写道。他是一个热忱的爱国主义者,新兵在内维尔庭院操练的步伐声,军官们发口令,士兵们列队行进,使他有点受鼓舞。然而,他也说:“许多朋友都死了,留在这里的没有几个,我为英国人民忧心;痛风和风湿病折磨着我,失聪使我无能为力。而战争还一直在打,不停地打。”

早在1915年2月,德国就实行了对英伦三岛的潜艇封锁。到1916年10月,封锁加强了,对船只不加警告即可击沉,所以1917年2月17日伦敦《泰晤士报》上出现这样的一条标题:

英国船只被潜艇击沉  
损失10 000吨

以后类似的文字就不是很少见的了。这一版上还登载了一条消息,说美国(当时尚未参战)港口实际上也被封锁了,准备出

口的 400 万蒲式耳<sup>\*</sup>小麦，被封在明尼阿波利斯的谷仓里，东海岸的港口已被无法启运的粮食堵住了。

在战争前夕英国依靠进口的程度是，肉类达五分之二，小麦达五分之四。吉卜林曾写过这样一首诗：

您吃的面包，您咬的饼干；  
您尝的糖果，您啃的骨头；  
谁给您送来，我们这些大轮船；  
如果有谁挡了我们的路，  
您就只有饿肚皮！

现在许多大轮船都过不来了，有些英国人已经在挨饿了。据说，有一个靠得住的办法来区分在英国谁穷谁富，您只消看一看他们：个子矮小，身体不壮实，而且面有菜色的准是穷人。可是现在营养不良已经是普遍现象了。罗素的第二位妻子朵拉(Dora)在《榆柳树》(The Tamarish Tree)一书中写到人们怎样“感觉到缺少脂肪和其他必需品造成的后果。当我看到我的两个牧师叔叔，我十分吃惊，这些原本红光满面的人萎缩成了什么样子”。

食品实行定量，物价在上涨；到 1916 年，一个工人家庭的食物账单比战前增加了 65%。到 1917 年初，严重的物资短缺跟着来了。“昨天在伦敦出现了常有的争购土豆和煤的场面”，4 月 8 日的《观察家报》(Observer)发了这样的消息。

在雷克瑟姆(Wrexham)有一个装满土豆的农庄大车被种菜的人运到了广场上，价格已到了以先令计。菜农马上把它们卖给所有来买的人。大车四周挤满了几百个吵吵嚷嚷的人，主要是妇女，爬到车上抢着买。好几个妇女在争吵中晕倒了，只好叫来警察维持秩序。

连高桌子也感受到了短缺。杰克逊在 1917 年 3 月 26 日

\* 蒲式耳 bushel，谷物计量单位，1 蒲式耳 = 36.37 升。——译者

写道：“我们基本上听从食品供应商的，星期二和星期五只有鱼和土豆，但是没有肉；一周另外几天有肉但是没有土豆；面包卷只有原来一半大；定量很奇怪地减少了。”如果说连英国人还难于得到土豆和糖，拉马努金在和平时期就渴望得到的夹之不易的特殊食品又怎么办呢？1914年6月他还写道“好的牛奶和水果”容易得到，现在，所有的水果和蔬菜都很难弄到了。

战争来到了拉马努金的面前。

食品的短缺和他的不规则的饮食习惯，当然会减弱他对疾病的抵抗力；而孤独，过分工作和气候更使他易于感染疾病。在他到达英国的第三年，他已到了这个地步，以至今天的医生会拿他作为健康的人和尚未病倒的人的界限。他注定要害一场病了。

一家著名的英国疗养院的医务监督温菲尔德(W. C. Wingfield)说，他最熟悉的一种病，即肺结核是由不良生活习惯所引起并加重的。“不良生活习惯”指的是“工作过度，玩乐过度，焦虑过度，营养不良，缺少必要的阳光和空气以及长期的任何形式的放纵”。

除了“玩乐过度”一项以外，拉马努金犯了所有各条。

## 6. 丹麦现象

到底是什么把拉马努金击倒了？无论是他在世或是死后，这都是一个谜。但是在1917年春，确有什么东西把他击倒了。5月，哈代去信马德拉斯大学报告拉马努金得病的消息——据认为是一种不治之症。

现在是送拉马努金回印度的时候吗？这个想法开始提到日程上了。但是许多印度医生都去服役了，在旅途上不可能

为他寻求足够的医疗照顾；还有，他可能根本到不了印度本土，潜艇使得过海旅行极其危险。当时尚未嫁给罗素的朵拉在1917年8月陪同父亲（一个海军部高级官员）去纽约，她写道：“我父亲有一个很能干的个人助手，但是考虑到潜艇的威胁，他觉得不能叫这位助手陪同前往。”于是他要求朵拉陪同。“我们是随护航队一起走的，而且要求我们随时都把救生衣放在身边。”战争使拉马努金不可能与那些数学家一起做研究，而他来英国为的就是和他们一道工作。战争使他得不到营养，可能使他得病，而现在疾病又使他留在英国。

这是一段使人焦虑的日子。他被送进了一家小医院——其实是包给三一学院病人的一家小私立医院——位于汤普森巷（Thompson's Lane），与茂德林学院隔剑河相望，距内维尔家也仅有一箭之遥。他病得很重，治疗又差，哈代不得不向三一学院院长求助，请他用专电急告在印度的拉马钱德拉·拉奥。后来当拉马努金稍有好转时，他又请苏布拉马尼安告知拉马钱德拉·拉奥，以减少前信引起的忧虑。

那时，拉马努金已经出院了，可能已回到主教宿舍。有证据表明，哈代本人还护理过他一段时间。不管是谁护理的，这总不是一件轻松的事。因为哈代给苏布拉马尼安的信中已透露了是什么使得恢复拉马努金的健康变得难办：“很难让他好好照料自己。”哈代写道。他说拉马努金是一个很麻烦的病人。

这并不是新鲜事。早在1910年，当时拉马努金在马德拉斯得了病，他的朋友拉达克里希纳·耶尔照顾过他一段时间。他后来说：“作为一个病人，拉马努金实在是少见的；他很固执，不喝热水，要吃葡萄，尽管又酸对他又没有好处。”拉达克里希纳请来了一位医生，给他检查，谢天谢地，医生叫把他送回贡伯戈纳姆他父母亲家里去。

他这 7 年没有变，对照顾他的那些人来说，他简直是一场灾祸。两个为他写传的印度人这样描述他：“一个难缠的病人总是要和医生唱反调的”；哈代不得不说：“难办”；博洛巴什——三一学院的数学家，李特尔伍德的朋友，且对拉马努金的生活有特殊的兴趣——这样说：“当他一开始接触一个医生时，他总是满怀信心和希望，可是—旦他觉得这个医生帮不了他时，就走向另一个极端，‘我掉到他的陷阱里去了，我怎样才能摆脱他呢？’他认为这个医生一无是处。”

拉马努金对食物是很挑剔的，又不听话，老抱怨这里疼那里痛，他像以前一样任性，不相信医药。人们说：“极少有医生愿把拉马努金带到自己的小医院，没人能受得了他的脾气。”

拉马努金这么犟，关于他的诊断又总说不清楚，他在两年里看过 8 位医生，至少住了 5 家英国医院和疗养院。大约是 10 月前后，他进了门迪普丘陵疗养院 (Mendip Hills Sanatorium)，位于萨默塞特郡威尔士城附近的希尔格罗夫 (Hill Grove)。他在那里就医于肺结核专家乔里-穆图医生，这是一位印度医生，说来也巧，他在 3 年前和拉马努金同乘“内瓦萨号”来英国。

最初，拉马努金被诊为胃溃疡，但在治疗中发现根据不足；有一次还想做外科探视手术。

有一个医生坚持说，拉马努金以前在印度做过的那一次水肿手术割除的是恶性肿瘤，现在是癌细胞在扩散；但是因为拉马努金的情况并未恶化，大多数医生不赞成这个看法。

另一种可能性是血液中毒。后来听到的看法是：拉马努金过分相信罐头食物的消毒，只吃罐头蔬菜，因为罐头的标记说明其为纯粹的素食。这种说法认为，拉马努金不用适当的锅去做饭，就在房里直接把罐头放在煤气火上加热，盖子上焊

接的铅逐渐累积起来终于造成中毒。

尽管如此，拉马努金在门迪普丘陵疗养院是按结核治疗的，以后几年也一直这样治。直至今天来看，结核(tuberculosis，简称 TB)——或称痨病，白色瘟疫——仍是最可能的。

在 19 世纪中叶，欧洲城市中死亡者有 1/3 是由于 TB。到 20 世纪初，尽管病例已减少了，在英国仍占 1/8。德国医生与细菌学家科赫(Robert Koch)在 1882 年指出，这种疾病来自一种特殊的微生物的感染，这种微生物是一种繁殖很慢的杆菌，学名为结核分枝杆菌。这种杆菌能渗入绝大部分的机体，导致机能损害。在脊柱、眼、骨、肾、淋巴结、肺中生存，但主要是在肺中。典型的症状是发烧，夜间盗汗，早上浑身湿透，咳嗽，呼吸困难，咯血，体重减轻——但并非所有的病人都完全一样，治疗方法也各异。病情时常波动，有时突然恶化，这就是可怕的“奔马痨”(galloping consumption)；有时，似乎已病得很重，却又自然痊愈。它常常会潜伏好多年，然后又复发。

受结核杆菌感染，会得肺结核；但在印度有许多人，也许是绝大部分，在英国也有许多人，受了感染而并未病倒，他们的免疫系统抵制了结核杆菌的进攻。是否会得病，显然又与遗传因素有关。但是几乎可以肯定，我们今天称为“生活方式”的因素是起作用的。尽管对其影响难以捉摸，而且在科学界还少有共识，但是有确凿证据使温菲尔德医生的印象成为可信的，乃是“工作过度，玩乐过度，忧虑过度，营养不良，[以及]缺少必要的阳光和新鲜的空气”致使在其他情况下本不会成功的细菌得逞，从而造成病变。

至少有一点，目前有大量的研究指出神经系统与免疫系统是有关的，紧张与患病是有关的。乳腺癌患者的配偶，因忧虑和绝望，终于病倒而不能控制。神经递质受体会在免疫系统的细胞表面上找到一个位点，这样成为两个系统间自然的

联系通道。有确凿证据提示——紧张、工作过度、忧虑、孤独——都会削弱免疫系统，从而为疾病的发生提供沃土。有一项研究发现，在美国海军中当翻译的菲律宾水手，通常离家一次有好几年，比其他水手时间要长得多，明显比别人更容易患TB。研究者得到的结论是“因与家人和朋友分离所造成的紧张”——简单说就是孤独起了作用。

拉马努金的素食主义，因混乱的饮食习惯和食物短缺使得营养更难维持，是否会使他患病？在这里，证据也只是提示性的，然而，丹麦现象使这个想法得到有力的强化。

布尔斯特罗德博士(Dr. H. Timbrell Bulstrode)于1908年向国会提交了一份《关于痨病疗养院及结核病的其他方面的报告》，其中附了一个图，示意在英格兰和威尔士结核病死亡率稳步下降，从1850年前后起每100 000人中有300例死亡降到1904年的120例。同一时期在瑞士和德国以及丹麦和美国也记录到类似的下降。

然后爆发了世界大战。

这时，死亡率出现了急剧的、阵发性的跳跃。在普鲁士，结核病的死亡率从每10万人中150例骤升到250例。在比利时，意大利和其他参战国也是一样。英国则记录到比较和缓但无可置疑的上升，从1913年到1917年上升了17%——两年之内把20年的持续下降全抵消了。

但是为什么丹麦也出现了30%的突然上升呢？丹麦是中立国，未受战争和内乱的影响。此外，为什么丹麦的死亡数字从1917年起又恢复下降，比其他国家早了两年？

情况是，丹麦在大战的前两年向英国和其他交战国运送了大量肉类和奶制品，国内物价急剧上升，但工资没有跟着涨。丹麦的人均消费下降了。但是1917年又恢复了无限制的潜艇战，丹麦产的食物现在堆积如山不能外运，国内市场的

消费上升了，于是——对 TB 的抵抗力也明显地随之上升。“由于有大量证据，基本上所有管理机构都接受了这样一种观点。”英国医生基尔斯(R. Y. Keers)在解释战争对结核病死亡率的影响时写道，“死亡率上升的主要因素是营养不良——丹麦的数字就支持这种观点。”

有什么关键成分是由肉和奶制品供给的呢？很可能是维生素 D，缺少它会使拉马努金和成千上万人一样，易受结核杆菌感染。

直到 1920 年，才发现维生素 D 在预防佝偻病（一种骨科疾病）上的作用，更近的研究又把它与免疫系统联结起来。在一项被称为是“令人赞美的流行病学侦探工作”中，威尔士医生 P·D·O·戴维斯(P. D. O. Davies)在 1985 年阐明，如何用缺少维生素 D 对免疫系统的影响来解释英国的来自印度次大陆的移民有较高的 TB 发病率。

戴维斯注意到，此病在这个族群中比土生的不列颠人中要高 30 倍；这项研究表明患病者有 1/3 缺少维生素 D。维生素 D 在聚集单核细胞和巨噬细胞——免疫系统中的关键角色——中很有明显作用的。戴维斯的文章发表在《结核》(Tubercle)杂志上，题为“缺少维生素 D 与寄主对分枝杆菌属结核病之防御受损之间的可能联系”，另一个医学研究者鲁克(Graham A. W. Rook)在评价戴维斯的论证之逻辑时问道：“这个复杂的[生物化学]通道可否解释英国的深色皮肤移民中结核病的发生以及用维生素 D 来治疗皮肤结核？”他的回答是：“大概可以。”

维生素 D 的主要来源有蛋黄、内脏以及很肥的鱼。事实上，从 18 世纪起就用鳕鱼肝油来治疗结核病。除了鸡蛋以外——这里的证据有了矛盾——这些东西拉马努金都不吃。

今天，维生素 D 的另一个来源是加维生素 D 牛奶，但是

拉马努金的时代还没有这种东西。

维生素 D 还有一个主要来源,它可以解释为什么例如在其本国的印度人与在英国的印度人不同,尽管维生素水平都是正常的;这就是阳光。太阳不仅发出可见光,还发出紫外辐射,紫外辐射能激活皮肤中的胆固醇来制造维生素 D。

拉马努金很少晒太阳。首先,剑桥的纬度太高,离北极圈不很远,阳光本来就少,仅有的那一点点阳光又大部分被笼罩着英国上空的云挡住了。还有,拉马努金足不出户,时常夜间工作,白天睡觉。即使白天坐在窗前工作也没多大用处;因为普通的窗玻璃吸收了制造维生素 D 的紫外线。

伟大的医生奥斯勒(William Osler)在他的经典之作《医学原理与实践》(Principle and Practice of Medicine)1902 年第五版讲到结核杆菌造成疾病还有很大的随意性,他这样说:

机体组织犹如土壤,有些杆菌完全有可能一下子就死了——种子落在了路边;另外一些杆菌是住下来了,造成或多或少的损伤,但最终是运气使防卫方的自卫力量得胜——种子掉在土浅的石头地上了;有些杆菌在组织上生长繁茂,没有受到什么抵制,硬化症战胜了,运气在入侵者一方——种子落在了好地上。

不论是拉马努金时代的医学知识,还是我们自己的科学证据,都说明他在英国的头三年确实成了结核杆菌生长的肥沃土壤。

在 1899 年到 1913 年之间,门迪普丘陵疗养院宣布“治愈”了几百人。在 20 英里(约 32 千米)半径内的其他 5 个疗养院显然也发现与威尔士隔着布里斯托尔湾与塞文河的这块地方有助于恢复健康。尽管有这样的地理条件和治愈率,总有什么事使拉马努金不能留在门迪普丘陵;他在那里为时很

短,很快,到 11 月,他被送到德比郡的马特洛克楼疗养院 (Matlock House Sanatorium),在那里,在一年中最好的那一段时光,他断断续续由三个医院来治疗,账单总计至少 240 英镑,可能相当于今天的 20 000 美元。

他才到那里就给哈代写信:

我到这里已一个月,而他们一天都不准我生火取暖。我好几次冷得打颤,有时饭都不能吃。一开始告诉我,不准生火,除了我才到的一两个钟头还有欢迎我的火。住了两个星期以后,他们说收到了您关于生火的信,而且允许我在做严肃的数学工作时会给我火。那个日子还没有到,所以我只好呆在这个冷得可怕的空房子里。

马特洛克的职工不让拉马努金取暖倒不是因为他们狠心残酷,而是在于在那个时期,让拉马努金住那种又冷又空的房间,是最为公认的治疗结核病的方法。

今天,当医师遇到 TB 时,他们有许多治疗药品可选,全视价格与副作用大小而定。至少在发达国家,这种病已经消灭了。但是一直到 20 世纪 50 年代才发明链霉素。在那以前结核被视为巨大的白色瘟疫,医学对之束手无策。杆菌的发现者科赫曾经鼓吹过一种疫苗,可惜不起作用。有外科手术,包括开胸治疗,抽取结核脓液,还有人工气胸,就是注入空气,压紧得了结核的肺,让它“休息”,以为这样即可治愈。拉马努金有一位医生,伦敦著名的胸病专家布朗普顿医院 (Brompton Hospital) 的哈罗德·巴蒂·肖 (Harold Batty Shaw),几年后还说这种治疗法日益为人采用。也有人赞成注射金盐;还有专利药品(如 Tuberculozyne),每天就着牛奶服三次;还有什么“赤十字祛热抗痨治痨粉”等等。

但是在拉马努金的年代,最为人普遍接受的是户外疗法,它出现于 19 世纪晚期,要求卧床休息;一般是要求新鲜空气

通畅的住处,大量食物以及一定的轻量运动。

布赖德(Linda Bryder)在她研究英国结核治疗的专著《在魔山下》(Below the Magic Mountain)中这样说道:“户外疗法治结核病早于对疾病起因于细菌的学说的革命,而且几乎没有受到其影响。”结核不是产生于城市贫民窟中吗?而广大的户外不是与健康相联系的吗?那么,远远的乡村中的户外空气就是不幸患了结核的肺所需要的了。无论如何,这种疗法的理念就是如此。

户外疗法是在德国发起的,对于英国的治疗实践影响很大,特别是在19世纪与20世纪之交。的确,位于黑森林(Black Forest,德国西南部山地)的诺德拉赫(Nordrach)疗养院是最有影响的德国早期疗养院之一,它甚至允许门迪普丘陵附近的一家疗养院借用其大名,称为门迪普丘陵的诺德拉赫,还有迪河畔的诺德拉赫(Nordrach-on-Dee)。

布尔斯图罗德在其1908年的报告中说,已不可能对疗养院和普通的医院做有意义的区别,因为“看到事实上所有医院都想实行‘户外’治疗”。到1913年,至少有52家英国疗养院赞成它,门迪普丘陵只是其中之一;马特洛克也是,虽然只是新近才变过来的,它原本是专长于热治疗的水疗法机构。

到拉马努金的时代,任由寒冷来施恩仍是治疗之上选。“大开着窗户并在外面的阳台上治疗这是命令,不管黑夜或白天多么的寒冷都是这样。”勒内·迪博(René Dubos)和让·迪博(Jean Dubos)在《白色瘟疫》(The White Plague)一书中这样写道,“用毛毯把自己包好的艺术是治疗中的要义,甚至成了仪式。”建筑师竞相设法给病人带来新鲜寒冷的空气。有些疗养院还有四面通风的小教堂。更普遍的则是把病人放在宽阔通风的走廊里排成一列的床上,德国人称之为“卧厅”。有时,疗养院完全不生火。甚至孩子们也不能免。在诺森伯兰郡一个

痨病孩子的学校里,1915年11月记录的温度低到华氏30度(约-1℃),在另一个疗养院里,战后不久,一个女孩把它描述为山顶上的一间茅屋,她的姐姐就呆在那里:“没有门,窗上没有玻璃;窗子和雨向里直灌[原文如此]。”

拉马努金并不是惟一生活在马特洛克的痛苦中的人。

但是还有其他原因使得拉马努金在治疗期间很不愉快——或者本来就不愉快,或者后来变得不愉快。

1917年9月哈代致信苏布拉马尼安说到拉马努金似有好转。他在信中提到,“仅仅几个月前,当时他在此地一个护理医院住了些时,我们发现他不写信给印度的朋友和家人,显然也得不到他们的信。他对此完全沉默,在我们看来似乎有些争吵。”

在此地,这是一个意料不到的震惊,给人一种疏忽了什么事的感觉。我们发现……显然……似乎有些争吵,用语含混完全不像是哈代所为。而哈代说到自己未曾注意到拉马努金的沉默时,语气简直有点像为自己辩解。

稍晚一点,又出现了一些迹象:拉马努金从马特洛克给哈代的信中第一次向他透露一些个人生活中的事:

我确实答应过我的母亲,我将在两年结束时回去。一年半以前,我给他们写过几封信说我要回来过一个长假;但是我收到母亲好几封不赞成的信,要我得到文学硕士(M.A.)学位后再回印度。于是我打消了回印度的念头。

我一直没有得到妻子或内弟或其他人的信。我的妻子只给我寄来几封很拘谨的信说明她为什么不得不离开我的家……

我的名字前的字母S表示Srinivasa,这是我父亲的名字。老实说,我没有姓。

拉马努金1916年没有回印度是因为他的母亲叫他别回

去吗？他的妻子没有给他写信吗？她已离开了他的家人吗？而拉马努金确实没有真名吗？

这一切都是哈代闻所未闻的。

确实，家里出了问题。只说是“争吵”远远不够，这些麻烦越过重洋使远在英国的拉马努金心烦意乱。更糟的是，哈代全然不知情，所以很难给他安慰。

1917年早些时，拉马努金的身体就出了大问题，他病倒了。而到了年底，不仅是他的身体，他的心理也出了问题。那时，他肯定是一个不幸福的人。幸福的人是不会想自杀的。

## 7. 家里出了问题

305

拉马努金没有收到佳娜琪的信，不是因为她没有写，而是他的母亲把信截了。

有一次，准备给拉马努金寄一个包裹，佳娜琪趁婆婆出去的时候，就塞进去了一封短信。但是她的婆婆柯马拉塔马尔回来得早，发现了这封信，就打开看了，而且骂她孩子气，骂她做蠢事，不准寄信。佳娜琪很生气，但是她能说什么？能做什么？她只有17岁，而她的婆婆……她的婆婆……所以她什么也没有说，只有安慰自己，说事情就是这样。

在印度的大家庭里，事情确实就是这样。婆媳不和，可能绝大多数印度家庭中都是这样。这是许多笑话的材料，而且通常还是西方观察家们批评的话柄，这些西方观察家敏感的嗅觉常被他们在印度的所见所闻触动。康普顿在1904年就写道，早婚制度本身就十分可憎，而女孩子在新家庭里的命运总是更坏。

年幼的媳妇从她自己家里被拉走了，而她的一切快乐本来全在自己家里。被迫屈从自己丈夫的脾气、任性

以及暴虐，这已经够可怜的了，如果再加上几个年长的妇女的专制和虐待，她孤苦无助、而又不能得到自己丈夫的欢心，那她的命运就可想而知了。如果她在自己的新家里得不到快乐与同情，那她绝没有任何地方可以得到，没有任何地方可逃；她自己父母的家是永远回不去了。向他们投诉只会得到一个强硬的命令：听你丈夫的话。

几年前，《印度教徒报》居然不怕麻烦反驳这种批评来捍卫印度文化。它争辩说：“恶婆婆，并非在印度教社会中一定有的；她也不像人家把她抹得那样黑。她对年幼媳妇的残酷也不是那么一成不变的。”当然不论怎么辩解，社论还是道出了真相的核心。

在印度，结婚组合了家庭，而同时也埋下了冲突的种子。妻子是丈夫家庭的新来者，常被看成是来图好处的，是对婆婆长年把持家务的威胁。此外，媳妇还只是一个孩子。婆婆在自己当新娘时，也受过同样的煎熬，所以就同样对待新媳妇，正如挨过打的老士兵会同样对待新兵一样。但是，这个“新兵营”要延续好多年，直到媳妇生了孩子，有朝一日，熬成了婆婆，直到那时，她在家里才有了支配地位。在这期间，她的丈夫，至少在公众面前对待她总是冷漠的，妻子必须惟命是从地受婆婆以及家里别的年长女人的摆布。有些家庭，妻子甚至不得把东西直接交到丈夫手里，而要先交给婆婆，再由婆婆转交。

这种情况自然就播下了家庭不和的种子。在拉马努金家里，这个种子则有特别肥沃的土壤。柯马拉塔马尔对儿子的占有心特别强——生这个儿子是她多年之所求，是狂热的祷告带来的。如果说一般的印度男子都是听妈的不听媳妇的，拉马努金就更其如此；他长得像母亲，思想也像她，又有和她一样强的个性。柯马拉塔马尔现已年近 50，一副可怕的凶

悍女人的形象。有人说她“疯狂地嫉妒”自己的儿子，而佳娜琪则是一个温顺幼稚的十几岁少女。

70年后，佳娜琪已经88岁了，是一个驼背老妇，和她的45岁的养子纳拉亚南(Narayanan)、其妻和3个孩子，仍住在马德拉斯的特里普利卡内。他们的很普通的小屋子前是一堵有铁栏杆的矮墙，离一条繁忙街道只有几英尺远，点缀了几株挂着沉重果实的椰子树。在房里，佳娜琪裹着一身棕紫色莎丽，靠墙坐在一张光凳子上，向上就能看见她丈夫的一尊青铜胸像，周围摆着他世界各地的崇拜者送来的花。皮肤虽仍光泽，却瘦骨嶙峋，她驼背而且衰弱，只有扶着椅子当拐杖才能在房里走动。她已经快聋了，纳拉亚南和她讲话要用一本杂志卷成一个筒，对着她的耳朵大叫。当她大声地断断续续地回答问题时，她的脸有时都会因为听话、说话很费力而扭曲。有时候，脸上又会出现豁达的笑容。

过去认识佳娜琪的人说，她比过去更有信心更有主见了。然而她从小受到的教育就是要接受媳妇的这种地位，所以直到现在年近九旬，尽管众人都知道她在柯马拉塔马尔手上的辛酸，她仍努力表示对她逝世多年的婆婆的尊敬。她通过纳拉亚南感谢她婆婆收自己为媳。她要求人们用比较迂回、适当尊重的话语来表达她们关系中的难堪。例如，要说她们只不过是“不能够看法一致”；她从家里跑了只不过是因为她“想要改变一下气氛”。

然而那些接近佳娜琪的人却道出了她的怨恨的来源。当拉马努金还在印度时，柯马拉塔马尔就不准他们同房。一旦他到了英国，柯马拉塔马尔只给佳娜琪最粗的衣料做莎丽，她没有自己的钱，最少一点零用也得向婆婆去要。她要一步步走到高韦里河边去取水而听不到一句好话。她是婆婆的尖刻语言的靶子。当然还有，她给拉马努金的信全部被截了，他的

来信也一样。有一次，拉马努金写信给他母亲说，希望佳娜琪能到英国来陪他；他的母亲根本不告诉佳娜琪，就回信说这完全不可能。

柯马拉塔马尔在冲突中有些什么道理，现已不可知了，不过有一种说法，说她骂佳娜琪命不好，克了拉马努金使他害病；她赌咒说，如果娶了别人，她儿子就不会害病了。然而也可能她对佳娜琪并无深仇大恨，只不过把她看成一个小孩子。她比佳娜琪年长约 40 岁，而且习惯于自己的一套管家——包括管拉马努金——的办法，等到佳娜琪长大了，她会给佳娜琪一点自治权的。所以无须想像就知道，她会怎样地对待佳娜琪的请求与抗议：理都不理。

不必去追问这种家事的细节，总之是充满了感情与言语的冲突。事情糟到这样的地步：有一次，甚至拉马努金半盲的父亲（他本来就反对这场婚事），本来在家里完全没有地位，也出来支持媳妇反对婆婆。

佳娜琪最后找到了一个离开家庭的借口，她唯一的兄弟 R·斯里尼瓦萨·耶恩伽尔（R. Srinivasa Iyengar），当时在卡拉奇（现属巴基斯坦）工作，快结婚了。婚礼将在他的老家拉金德兰举行，她和拉马努金也是在这里结婚的。她显然应该去，她的父母亲，通过自己在贡伯戈纳姆的朋友，也知道出了什么事，很可能是他们的主意，以婚礼为借口帮佳娜琪脱离柯马拉塔马尔的魔爪。

稍后一点，佳娜琪住在卡拉奇的兄弟处，写信给拉马努金，这一次信寄到了。信中问他能不能寄一点钱给她，以便去买一件新的莎丽和送兄弟结婚礼物？拉马努金倒是尽责地寄了钱去。但由于长期没有收到佳娜琪的信以及听了母亲的一面之词，他的回信没有丝毫温情。

家里的麻烦有如洪水破了堤，把拉马努金与家庭的关系

搞得很不正常。他的家信老是延迟，后来干脆就不写了。1914年，拉马努金每个月写三四封家信，到1916年，两三个月才写一次。而在1917年家里没有得到他的一点消息。

有很长时间，可能是觉得被家人抛弃很丢脸，拉马努金绝口不对人言。但到最后，当他住在剑桥的疗养所时，再也忍不住了。他告诉了哈代，也告诉了朋友查特吉，查特吉有一天去看他，发现他看起来很不愉快。“出了什么事？”他问道。

“喔，我的堂屋(*my house*)<sup>1</sup>一直没有给我信。”拉马努金回答道，用了一句南印度的土话，称妻子为“堂屋”。

查特吉当然懂这句土话，但他开玩笑说：“屋子是不会写信的。”

家里的“争吵”打破了拉马努金的平静，成了他感情生活中一个纠缠不清的隐患。这已经够糟了。哈代与他相处已经三年半了，可是还对他的个人方面所知甚少，这说明了更多也更糟的问题。哈代大概是他在英国最好的朋友了。至少在他得病以前，两人几乎每天都见面。然而，对于拉马努金一直没有收到家信——很可能还有对于拉马努金适应英国生活所感到的紧张，对于那种彻骨的孤独感……哈代直到现在还一无所知。

那么，如果他们是知己，拉马努金为什么不老早告诉他呢？

事实是，他们并不是亲密的朋友。拉马努金与印度隔绝了，他与英国人也隔绝了。而且，由于人格上、文化上与环境上的鸿沟，他与哈代也是隔绝了的。

<sup>1</sup> 湖北湖南土话有称妻子为“堂客”者，一般中国人则常称为“屋主人”，似与此相近。——译者

## 8. 纳尔逊纪念碑

首先,哈代不只是对拉马努金有深切的关心,他对许多别的事也一样关心。他是一个国际型数学人物;他所涉足的数学领域除拉马努金研究的以外还有许多。从1915年到1918年,他一共写了45篇数学论文,其中与拉马努金合写的只有4篇,当然其他论文也有他们共同工作的影响。哈代在伦敦数学会中很活跃,参加其会议,担任其职务。有时还参加一些看起来很细小的“刊物”杂事。例如,1917年1月,他着手编一本小册子,为论文的写作提供种种建议。他在剑桥哲学学会(Cambridge Philosophical Society)中也很活跃。1917年他争取将该会会刊(Proceedings)分为两个独立刊物,其中之一专门发表纯粹数学论文,意图提高纯粹数学的地位。

哈代对数学以外的事也颇为关心,特别是反战。1915年三一学院的一个青年研究助教尼古拉斯(Tresilian Nicholas)由前线短期回到剑桥,他发现在大厅里坐在他身边吃饭的正是哈代。哈代很吃惊地发现尼古拉斯对学院现在的事一无所知,于是问他:“这一段时间你在做什么?”尼古拉斯回忆道:“当我说我一直在地中海前线服役时,他以极不赞成的眼光看我一眼,然后整个晚上只和另一位邻座谈话。”

战争一开始就把剑桥分裂了,使徒社中的哲学头头穆尔,15年前就是哈代的“教父”,就因为自己在战争问题上的立场而十分痛苦。法国数学家莱维(Paul Lévy)在为穆尔写的传记中说:“对战争的意见最受[他]关注者之一就是哈代。”有两年之久,在穆尔的日记中,哈代的观点一再出现。穆尔在1914年9月25日的日记中写道:“哈代才‘度假’回来,他认为只要法国和比利时是安全的(可从来就不安全)就应该尽快议和。”

在这段时期，三一学院因罗素的事件分裂了。罗素是当时最负盛名的数理哲学家。他不但后来反对越南战争，当时他就是激进的反战者。作为一个和平主义者，他当时在那些保守的高级研究员中很不得人心。而因为年轻的助教都上了前线，三一学院正是由这些保守的高级研究员管理的。1916年4月，一个名叫埃弗里特(Everett)的小学教师，一个被允准免于战斗任务的良心反战者被征召参加一个非战斗人员军团；他因拒绝而受到军法审判，被判处两年苦役。罗素在反兵役协会(Non-Conscription Fellowship)中很积极，在一本小册子中为埃弗里特辩解，罗素作为这本小册子的作者而被记录在案。于是，他被定罪为公开反对征兵与军纪而被判处交纳一大笔罚金。

1916年7月11日，三一学院解除了罗素的讲师职务。《剑桥杂志》以“三一学院的耻辱”为题，哀叹学院之作为。哈代后来在《罗素与三一学院》(Bertrand Russell and Trinity)一书中详细记载了此事，与另一些研究员——其中有李特尔伍德、巴恩斯、内维尔等人——共同抗议此事。(有一则评论写道：“哈代这本小书使人回想起这样一种生活：参加者在白天尽其所能地彼此中伤，而晚上又坐在一起吃饭。”)

到1917年5月5日，《剑桥杂志》为民主控制联合会剑桥分会刊登了一个小广告，说“本会旨在表达关于对外政策与战后安排的独立意见”，又告诉读者“欲知其详可向三一学院哈代询问”。稍早些时，哈代至少帮助了一名数学家免上前线，声称其研究对国家利益极其重要。后来，在1918年他又对一个能干的大学图书馆馆员因反战而遭解雇提出抗议。哈代写道：“就我所知，此举并非因为丁沃尔(Dingwall)先生做了什么事，这纯粹是因为他坚持一种被认为是令人不快的观点，……罗素的案子(我激烈地反对大学理事会的行为)与此不同：罗

素做了什么事,不论是对是错,有所行动是实在而确定的。”

总之,哈代很忙,这些事分散了他与拉马努金相处的时间与精力,尽管两人一起工作,拉马努金不可避免地在自己的生活中更多地惟哈代马首是瞻。

但是,即使哈代不那么忙,两人之间人格的与文化的鸿沟也使他们不可能真正地亲密。

多年以后,英国数学家图灵也抱怨哈代甚至缺少表面上的友情。那是 1936 年,哈代在普林斯顿停留一年,图灵发现他“十分冷淡,也可能是腼腆;我在到达的当天就在普赖斯 (Maurice Pryce) 的房里见到了他,但他一句话也没对我说。”哈代后来放松了一点,但是如图灵的传记作者霍奇斯所说,“虽然是‘友好的’,但还不足以克服两代人之间多层次的矜持。”——尽管他与哈代“以如此相似的眼光来看世界”。

而哈代与拉马努金是通过如此不相同的眼光来看世界的,有待克服的就更多了。

不论有什么性心理上的根源,在哈代周围总是笼罩着可爱的带点同性恋味道的屏障,把自己与他人隔开,而这屏障比通常的英国人更难以穿透。哈代的一位印度崇拜者说哈代对拉马努金抱有一种“父辈的关爱” 这个词用得很适当;他们之间关系的特征是距离,而不是同伴之间的亲密。哈代年长 10 岁,总是居于长辈的地位,一种类似父辈的关切,但却是不可亲近的、要求严格的、相距甚远的父辈。

在伦敦特拉法尔加广场(Trafalgar Square)中央,是为了纪念英国海军元帅纳尔逊(Horatio Nelson)1805 年击败法国海军而建造的纪念碑。站在纳尔逊纪念碑底部,走近一看都是他一生战绩的浮雕 但是您抬起头来看看这座高达 167 英尺(约 51 米)的笛形纪念碑,站在碑顶的纳尔逊本人雕像就只留

下一个穿着大氅，头戴三角形海军元帅帽的轮廓，其面容则很难看清。如果有朝一日，让哈代选择是要一个这样荣耀但距人甚远的雕像，还是要一个较小的，容易接近的雕像，哈代宁取前者。他更喜欢屏障、隐私和距离带给他的安全感。

他们之间关系的最后屏障，当然就是哈代所写的：“拉马努金是一个印度人，我想，一个英国人和一个印度人要适当地了解，总是有困难的。”这里可以借用吉卜林的诗句：“东方总是东方，西方总是西方，两者终难相遇。”在英国人看来，印度是捉摸不透的，更说不上去理解了。但是由于哈代从未打算填起这种文化鸿沟，以至它始终妨碍了两人更亲密的友谊。

斯诺有一次讲到哈代时，说“他是第一个承认自己对任何人都少有深刻洞察的人”。人性千奇百怪，本不是他要占领的地盘。是的，他可以问拉马努金关于艺术或哲学的知识——在高桌子上人们从容应对的正是这一类欧洲味十足的东西。对拉马努金在文学上和政治上的口味，他略有所知。但他极少和拉马努金谈论他的家人，或南印度，或种姓制度或印度教诸神，他没有探讨过这一切。哈代后来说过：“关于拉马努金生平的事实，我全靠塞舒·耶尔和拉马钱德拉·拉奥告诉的”，而不是靠自己从拉马努金那里一点一点了解的。

甚至如拉马努金在印度的数学影响如何，这样一个不惹是生非的事，哈代也从未打听过。“我承认我是该受责备的，”哈代写道，“因为有许多事我们现在想知道，而当时我本来可以不费力气就能了解到的。我几乎每天都见到拉马努金，只要稍作交谈就会弄清绝大多数现在不明白的事。”但哈代从没有这样做，从未超出当时所谈的数学问题，极少问起这一类事……

现在我对此感到很遗憾，不过这倒没有什么，而且也是自

然的。[拉马努金]是一个急于把工作做好的数学家，而我归根结底也是数学家，一个数学家遇见拉马努金时总有比研究历史更有趣的问题想问。他几乎每天都要给我半打新定理，这时去操心他是怎样发现这个或那个定理的，似乎是可笑的。

数学才是他们相互关系的基础，这是他们彼此交往中得到快乐的惟一源泉。哈代像许多英国人一样，在他的缄默后面保存了一种对于贸然侵入拉马努金私人生活的蔑视。他并不是一个理想的人，不可能面面俱到地把一个孤独的印度人从孤独中拔出来，减轻他适应异国文化的困难，给他挡一挡英国的严寒。

## 9. 拉马努金、数学和神

在宗教信仰方面，哈代只能用他熟知的，在剑桥知识分子中流行的无神论、不可知论和怀疑论的观点去看待拉马努金，而不肯用稍有不同的观点去看待他；说到底就是，完全不能看到他根深蒂固的东方人的心灵。这一点也体现了两人的距离。

在 20 世纪 30 年代，贝尔指出，拉马努金打破了数学家自我估价的常规。他说：“当一个真正伟大的[算法学家或形式主义者]，就像印度教徒拉马努金，突然出现的时候，甚至专门的分析学家也会认为这是上天的赐予。”贝尔说他就是用一种“超自然的洞察力”，找出似乎互不相关的领域之间潜在的联系。

超自然的洞察力。

上天的赐予

说来也怪，多年来，在讲到拉马努金的才能时，那些通常很顽固的理性主义者也会使用这种教士和术上的语言。哈代是第一个彻底查阅过拉马努金的笔记本的西方数学家。其后的75年中，许多别人也这样做了。面对拉马努金的才智，他们一再重复着表达敬畏与惊讶的那几句话，他们用一些含糊其词的话语传达拉马努金的神秘性。

麦迪逊的威斯康星大学专门研究拉马努金的数学家阿斯基(Richard Askey)这样说：“对于他是怎样做到那些了不起的事，是什么东西把他引导至此，或引导到别的方面，我们一无所知。”伯恩特在研究拉马努金的笔记本多年后则说：“我现在仍然完全不懂它们。我可能会证明它们，但我不知道它们来自何处，不知道它们与数学的其他部分怎么能协调起来。”他在另一处又说：“拉马努金的创造过程之谜仍然罩在一块没有掀开的帷幕后。”

李特尔伍德对于拉马努金的分区数研究的陈述，也弥漫着这种谜一样的气息。他本想追溯拉马努金的思路，但最终也只好罢手，因挫折而烦恼：

「这里」的确有一点真正神秘性的笔触——一旦我们事先知道「其结果」，我们可以用很大的劲，慢慢地找到 $\Psi_n$ 的正确形式。但是为什么拉马努金知道一定会有一个正确形式呢？若以理论洞察力来解释，其能力之高实难相信。然而又无法相信有什么数值的结果向他暗示如此强有力的结论。而且若不知道 $\Psi_n$ 的形状，是不会有什么数值例子暗示诸如此类的东西的。于是，至少无法回避说正确形状的发现实在是神来之笔。

用波兰裔数学家卡茨(Mark Kac)的话来说，拉马努金是“魔术师”而不是“通常的天才”。

一个通常的天才就是一个和你我都一样的人，只要我们比现在的实际状况好上多少倍就行了。他的心智是

如何工作的，并无神秘可言。只要我们一旦懂了他所做的，我们就会确信，我们本也可以做到。魔术师就不同了。用数学的行话来讲，他们是我们所处空间的正交补空间，他们的心智工作方向与目的是完全不可理解的，即使我们弄懂了他们所做的事，他们做这些事的过程对我们还是漆黑一片。

神秘，魔术，漆黑一片；通常的思想不可及的隐秘操纵；拉马努金的工作始终像是施了魔法似的——理性重重地撞上了自己的极限。

但是，是不是有什么东西在理性的极限之外接过手来？我们在此是否要与我们无法理解的神灵或者超自然的力量较量？

在今天看来，当科学与西方的理性主义处处高奏凯歌时，这些想法是很靠不住的，过了时的，甚至是异端邪说。但是没有足够理由怀疑拉马努金本人作如是观。那些在其他方面有理性主义倾向的南印度人——会计、律师、数学家、教授——想起他来都记得他在灵性世界中悠然自得；他的母亲和祖母从他幼年时起就把他引入了这个世界。这些南印度人都愿意承认这是他的数学灵感的一个来源。

马德拉斯的前总会计拉贾戈坡兰(T. K. Rajagopalan)说过，拉马努金坚持说，当他在梦中见到血滴之后，“写有最复杂的数学公式的纸卷就会在他面前展开”。按传统说法，血滴的出现正是歌颂大神那罗希摩的显身，而女神娜玛吉利正是那罗希摩的神后。

拉马努金在帕协阿帕学院的同班同学拉达克里希纳·耶尔记得有一天向他问起研究工作时，他的回答是，用拉达克里希纳的话说：“那罗希摩大神已在梦中向他显身，告诉他说，发表研究成果的时间还未到。”

这事发生在他到英国前一年左右，约为 1912 年或 1913 年初。当时拉马努金把他的工作交给数学教授 R·斯里尼瓦散看，宣称他写出的方程是神意的产物。

拉马努金的朋友们都一致注意到他对占星术和圆梦的兴趣。他的一位童年朋友安南塔拉曼有一次说过，他的兄弟做了一个梦，拉马努金就把这个梦解为街上他们家后面一个邻居死了（事实果然如此）。

拉马努金在马德拉斯的朋友戈帕拉卡里 (K. Gopalachary) 说，拉马努金把自己很早就对数学有兴趣归之于一个梦——简直莫名其妙，梦见街上一个小贩在卖丸药。

拉马努金相信有看不见的超自然的力量，至少在印度，是一桩不必为之感到不安或保守秘密的事。对于他，这并非属于个人的信念，而应该告知周围的人。这也不是他的私有理论，他不仅喜欢去思索，而且自觉遵行。

因此，在他赴英前极为兴奋的一年里，他仍然抽时间占星算命，作宗教活动祈求亲友吉利。他研究自己的掌纹，深信自己活不到 35 岁，而且这样告诉他的朋友们。安南塔拉曼还说他认为特里奇诺波利附近的一座庙有治疗心灵疾病的神力，并且劝一些患者到那里去。当拉马努金还就读于帕协阿帕学院时，梦见一家人的孩子快死了，他按照梦中所示，到这个孩子父母亲那里，劝他们把孩子挪到另一座房子里去。他说：“人的死亡只会发生在时间与空间一定的交汇点上。”

在赴英前一个晚上，他乘电车回到特里普利卡内的家里（马德拉斯自 1895 年就有了电车，是全印度最早的）。电车司机自己高兴，一时急停，一时又急驶，肆无忌惮地折磨乘客。拉马努金和他的朋友坐在司机后面的长凳上说：“这个司机以为他自己有本事要快就快，要慢就慢，他忘记了这个力量其实来自车上面电线中的电流……”然后，他引用了印度教的一个

术语“摩耶”\*(maya),即“幻”,神利用这种魔力使人相信其实是“幻象”的东西。他说:“其实摩耶就是这样在世界中起作用的。”

所以拉马努金深深沉溺于他的文化信仰体系。来自各方的那么多年形形色色的故事,在怀疑的理性主义者哈代看来,加到一起也还是什么都算不上,只是一个人习惯性地依附于他自己的家族与种姓的古怪传统而已。

哈代确实坚持这种看法。“我不相信东方的年代久远无法追忆的智慧,”他在关于拉马努金的一次讲演中说:

我要向您们展示的是这样一个人的形象:这个人和其他杰出人物一样有许多古怪之处;但他也是这样一个人,在他的社会里您会感到喜悦,您可以和他一起喝茶,讨论政治和数学。总之,是这样一个形象,并不是来自东方的奇迹,或者一个有精灵的白痴,也不是一个心理上的怪物,而是一个有理性的人,恰好是一位大数学家。

哈代坚持认为,拉马努金的宗教“只不过是一种仪式,而不是人的心灵的信仰,我清楚地记得他曾告诉我,对于他来说,所有的宗教,或多或少都一样是真的,这使我大吃一惊。”

哈代在另一个场合还写过,他确信“拉马努金决不是神秘的,而宗教,除了在一种严格物质的意义上以外,在他的生活中不起重要作用”。

斯诺多年来保存着哈代在自己几乎空无一物的办公室里的一张大照片,而且在各个方面都尊敬他。但是自从斯诺发现哈代坚持认为拉马努金“并不甚相信神学教义,除了一种模糊的泛神论的行善,而哈代本人也差不多是这样”之后,就注意与他保持距离了。他写道,“在这一方面我并不太相信哈代

\* 摩耶一词可参阅马元德译罗素《西方哲学史》下册307页,商务印书馆,1982年版。——译者

的洞察力。”

多数西方观察家和一些印度人，都从哈代这里得到一种启示，把拉马努金的神秘气质与他构建数学中的联系之神奇能力割裂开来。褒其后者，贬其前者，一笔勾销他的轻信——他相信占星术的弱点，他的荒谬的迷信，他对娜玛吉利的虔信——认为这都是包围着他的数学创造性的不幸的怪癖，但是为了他的数学创造性也不得不予以容忍。

然而对于拉马努金本人，这种割裂则不那么界限分明。哈代 1914 年在英国遇见的这个人仍然是一个南印度人，他是在印度诸神以及并非严格不变的印度宗教信仰之上生长起来的。在他身上，有自然的和超自然的、有雅可比和娜玛吉利，还有数与神共居一处，颇为融洽而亲密。

拉马努金的宗教信仰是否有惠于他的数学才能呢？肯定没有，因为如果真有的话，其他有类似信仰的人也会分享某些数学才能了。他也并不一定从他的作为和迷信中得到数学洞察力。把话说白了，说拉马努金相信他所相信的东西一定为真，这一点并不对。另一方面，他的神秘气质与他的尚未开发的数学才能显然可以完全自如地相处，这却证明了人类心智特殊的可变性，对于概念的松散联系与细微结合都特别地能够接受。

尽管哈代强调严格性，但也不否认数学中模糊的直觉心智过程的优势。例如说，他曾这样谈论布罗米奇：“如果他思想少一些严格性，生活就会更愉快一些，而且会成为一个更好的数学家。看来，他最好的数学工作也稍欠想像力。在许多主题中，要论掌握技巧，很难找到比他强的人，但他就是缺少‘模糊思考’的能力。”而某种超常发展的“模糊思考”能力，正是拉马努金的特殊天赋。

——再有人说，拉马努金对印度教神灵的信奉不能解释他

的数学才能。但他对超自然的影响的开放态度，却暗示他的心灵中，对因果关系有一种不甚可靠的易变的有弹性的观念，这使他能发现某些纯逻辑才能更高的人反而看不见的东西：在他人以为互无联系之处，他却能找到其相通之处；而且在它稍纵即逝之前就抓住这灵犀一点。他的心灵很可能是这样一种心灵，其批判性的功能弱于其创造与综合的功能。

当然，正是这种批判的功能使绝大多数人安全——不会匆匆忙忙信奉那些愚蠢的虚假的东西。但是在拉马努金身上，批判性功能的发展一直跟不上创造性功能。这使他轻信、天真但又具有感染力，所有认识他的人都会注意到这些。这似乎成了他的保护屏，没有它，他就会成为愚蠢和虚伪的牺牲品——多年来，许多人都是这样看待他对手相、占星术，以及许多其他密传的东西的信仰。

然而，如果没有这样一种保护屏，他是否会对数学之光更加开放呢？

至少哈代在这个心灵的宇宙中不是那么悠游自在的。

“我总是把数学家看成一个观察者，一个眺望远处的山脉并把结果记录下来的人。”他在 1928 年剑桥的一次讲演中说：

他的目标只不过是尽其可能地分辨清楚不同的山峰并告诉别人，有些山峰他很容易就弄清楚了，另一些则不太清晰。他分明看见了 A，而对 B 则只有易变的一瞥。最后他看出有一道山梁由 A 伸出，顺着这道梁他发现其端点聚成山峰 B。现在 B 已固定在他的视觉中了。由此，他可以得到其他的发现。在有些情况下，他可以辨认出一道在远方消失的山梁，于是他猜想，这道山梁一定连接到一座山峰，或者在云端，或者在地平线外。

但是对于认出那些山峰的过程是怎样进行的，哈代大体上不发表意见。说真的，在他研究数学、写作数学的漫长的一

生中,他极少讨论数学背后的这个创造过程,甚至在他的《一个数学家的自白》这本对数学家的世界深具洞察的书中也是如此。只是对于过程所得出的产物定理本身,他才有兴趣。他可以希望,通过这个证明来断定这些定理对不对;或者可能会去估量一下它在数学的苍穹之中处于什么位置。他在《自白》中谈到一些定理,恰如艺术评论家谈论一个画展中的画一样,总是用某种数学审美尺度来衡量它们。

他谈到数学的创造性可能只有一次,那已是多年以后,在他的晚年,他为阿达玛的《数学领域中发明的心理学》(The Psychology of Invention in the Mathematical Field)写了一篇评论。哈代认为,哲学家和诗人们关于数学的创造过程讲的那些话几乎都是空话。但阿达玛是一位数学家,而且是一个大数学家。他进入法国头牌科学学校巴黎综合工科学校的人学考试分数是历史上最高的。他又曾和比利时数学家德·拉·瓦莱-普桑一起证明了素数定理。他关于“数学领域中的发明”说了些什么,那是值得听一听的。

在这一点上,哈代同意阿达玛的说法,即:

无意识的活动在发现中常起决定作用;经过一段时期没有效果的工作后,休息一下,散一散心,头脑中常会到来突然的觉悟;这种突如其来灵感只能用行为主体不自觉的活动结果来解释——这方面的证据太多了。

但是接下来,哈代所说的每一个字似乎都叫人最好不必冒险。我们马上就会遇见不可知,所以最好还是躲过这个问题,而不是陷入愚蠢的解释。说真的,他称赞阿达玛,是因为阿达玛“聪明地不过于自信,而一切结论都只是暂时性的”。

哈代认为无意识的活动“与比较正常的活动[原文如此]有何关系,与完全自觉的工作或有意识的相关沉思有何关系,这是难得得了的问题”。当阿达玛试图对这个哈代称之为

一切问题中“最困扰人的问题”——即在你的意识流中纷纷扰扰的观念之中选出一个——进行试探性的解释时，哈代就把他自己的态度说得再明白不过了。他写道：“可能是这样，但我不能说这很有说服力；我不是心理学家，而我对种种形式的神秘主义的厌恶又可能使我有不适当的偏见。”

有一处，哈代引用阿达玛的话说，“‘无意识不仅是自动的，它还非常机智和纤细’，甚至‘它比有意识更知道如何求得神赐，因为当意识失败之后，继之而来的就是它。’但是我不喜欢这类语言。”因为对于哈代，这已近乎无稽之谈了。

他以最坦诚的态度承认：“读到后面几章时，有一种解脱之感，后几章充满了有趣的而不那么矛盾重重的东西。”

这种无意识的过程，这种模模糊糊的联系，突然的灵机一动，松散的无以名状的联络，凡此种种成为一个怎么说都可以的说不清的领域。按哈代的说法，乃是他不愿久留之处，去讨论它乃至去思考它，都使哈代不舒服。数学是一个“创造性”的活动，这一点毫无问题，数学属于最具创造性的领域。至于这种创造性由何而来——哈代却不愿深究。所以，可以断言，把拉马努金的数学才能归之于某种东方迷信的产物，是得不到哈代的认可的。

哈代是一个献身的无神论者，他代表了一种极端的立场；而拉马努金则对西方与东方传统中都大量存在的信仰与信念比较合流。这种信念认为创造性与直觉作为一方，神灵的力量作为另一方，两者实有相通之处。

例如，希腊人祈求缪斯(muses)<sup>\*</sup>——诗人们向她们祈求灵感。英语和法语都有“神赐真理”的说法。阿达玛自己也注

\* 希腊神话中的文艺诸女神。——译者

意到，正是无意识活动之难以捉摸，使多少世纪的思想家们都对其作用赋以更强的力量。

意识性不仅来源于我们自身，而甚至与神性相通，这个思想大概亚里士多德也是承认的。按照莱布尼兹的意见，它使人与整个宇宙相通，宇宙中的一切无不在我每一个人中有反响；谢林(Schelling)有类似的思想；费希特(Fichte)也求助于神性。<sup>\*</sup>

近代，在这个原理之上建立了一整套哲学学说，始自迈尔斯(Myers)，其后则有詹姆斯(William James)，……在此后哲学中，无意识使得人与感官所不能及的世界相通，与某种神灵的世界相通。

不只是在印度把创造性的洞察力归之于神的影响，数学家中也不只是拉马努金有强烈的宗教信仰。牛顿是一个毫不犹豫的虔信者，他在宇宙的神奇面前感到自己的卑微，后来又自己研究神学。按贝尔的说法，欧拉“从没放弃过一丁点儿他的加尔文教派的信仰”，年龄越大，越皈依宗教。柯西一直努力使其他数学家信奉罗马天主教。埃尔米特有显著的神秘主义倾向。甚至理性启蒙之父笛卡儿，贝尔说他是这样回答精神世界的召唤的：“尽管他有理性的怀疑主义，但他的宗教信仰却是不折不扣的，他把宗教信仰比做他的乳母。而他的宗教信仰就是从他的乳母那里来的，他说依靠宗教就像躺在乳母怀里同样可以得到安慰。”(贝尔极具睿智地加了一句“一个理性的心智有时是地球上理性和非理性最奇妙的混合物”。)

有证据表明，甚至一些不甚迷于宗教的数学家也对于信仰与理性之间那一大片暗黑的领域怀有敬意。例如高斯有一

\* 谢林(Friedrich Wilhelm Joseph von Schelling, 1775 ~ 1854)和费希特(Johann Gottlieb Fichte, 1762 ~ 1814)都是德国哲学家。——译者

次证明过一个定理,但他写道:“这并不是凭借自己的苦干,而可以说是神的恩惠。”哈代在剑桥的同班同学金斯,也是一位著名的应用数学家,写道:“从其创造之内的证据看来,宇宙的伟大建筑师,现在开始变成纯粹数学家了。”甚至当李特尔伍德论述一件他自己的事时,也有这样的口气:“我的铅笔写出了”一个特别迷惑人的问题的解答,“即令我们不赞成神赐的说法,看来我的下意识确实早就知道这件事了”。李特尔伍德的话当然是常见的、安全的、讥嘲的剑桥的怀疑主义,也可能不过是一种文体的技巧——正如其他一些说法可以看成不过是比喻。然而,每一句这样的话总包含了,哪怕只是一点点,在人类创造性的神秘起源面前的矛盾心情与敬畏心态。

然而,哈代不承认自己也有矛盾心情。在他看来,神灵世界一说纯系废话。他知道——就算是他的信仰吧——不管拉马努金的天才来自何处,总有什么直截了当的东西可以解释它,他写道:

时常有人问我:拉马努金有什么特殊的秘密;他的方法和其他数学家的方法相比是否属于另一种类型;他的思维方式是不是有真正反常之处。我没有把握能令人信服地回答这些问题;但我不相信是这样。我的信念是,所有的数学家都是按同一种方式思维的,拉马努金也非例外。

他是说,拉马努金的数学也是心智工作的理性产物,其他的话就不必说了。

有人以后会说,“哈代对数学以及对心智所创造的一切,其痴迷之深,也和驱动其他人崇拜神的力量属于同一类型;对于哈代,唯一的谜是,这种力量从未使得哈代崇拜神。”至少在公众场合从来没有过。就算拉马努金走遍英伦三岛,也找不到一个人在灵性方面比哈代更不同情他;也找不到一个人在

这个领域比哈代更不欣赏他。

哈代以这样的说法来为他确认拉马努金并无真正的宗教感情而辩解：“如果像拉马努金这样严格的婆罗门对我说，他并没有一定的宗教信仰（他也确实这样说过），我敢以 100 比 1 打赌，他说的是真话。”不管拉马努金原话是怎么说的，鉴于印度教有一种很宽松的容忍性，他的话也与真正的强烈宗教感情互不矛盾。哈代的结论是，“如果拉马努金的朋友们假设他接受了通常的〔印度教〕教义，……而他又不想使他们的想法幻灭，那么，他就是在实行一种无害的，而且可能是必要的真理经济原则。”

拉马努金搞的确实是一种真理经济原则，但是几乎可以肯定的是，其对象就是哈代。拉马努金在英国呆得还不够长，以致哈代还来不及让他知道，或者拉马努金还没有意识到，别人很难接受他向娜玛吉利祈祷。拉马努金面对的是一个人称“无神论福音作者”的哈代，他又不想在这个敏感问题上开罪他的恩人和朋友，所以干脆从不在他面前展开自己丰富与广阔的心灵生活。

而这就是问题所在：在哈代面前，他总得要讲点面子，总得要掩饰自己，不能率性自如。虽然在一起工作了好几年，两人之间始终有一条不可逾越的鸿沟。结论是不可避免的：哈代从没有真正认识拉马努金——因此也不可能对拉马努金在英国所感到的孤独起到缓冲作用。

## 10. 在 $x = 1$ 处的奇点

四分之三个世纪以后的 1989 年，美国佐治亚州一个黑人女子学院的黑人教务长回忆起她在北方以白人为主的学院做行政工作时受到的限制。她说“我在哈佛福德学院（Haverford

College)认识的黑人学生可能学得不错,但我从未感到她们很愉快。”——因为她们作为黑人不能率性自如地生活。拉马努金在剑桥也有这种感受;有了哈代的指导,他的研究很不错,但他并不愉快。

他可能自己并没有意识到这一点,拉马努金并不是一个与自己的感觉相协调的人。他因数学而狂喜,因与哈代的学术对话而得到巨大的满足,在外表看来心满意足——确切地说,是对别人说他心满意足——这些他都做得到。但是,在一些他自己也说不清楚只是模糊感到的需求上,他又是不满足的。

有经验的旅行者大概都有一种共同感受,那就是适应另一种文化需要柔顺性,要能入乡随俗。被逐出国的人、移民和留学生的经验都证明了这一点。但是,柔顺性决非拉马努金的稟性。要花极大的精力才能去旧图新,何况还需要主动地这样做。而拉马努金则把全部精力都投入了数学。当英国的寒风向他吹来时,他不肯弯腰。

于是,他折断了。首先是在身体上,然后在精神上。

1916年,拉马努金的导师巴恩斯曾去信马德拉斯大学说,由于拉马努金的成就,他很可能在下一年10月成为三一学院的研究员。但是到了1917年10月,拉马努金并未入选。那时,学院正因罗素事件之争而分裂,而拉马努金的支持者哈代又恰好属于劣势阵营。而且,按后来发生的事来看,种族主义也是因素之一;拉马努金归根结底还是一个深肤色的人。

失望之心使拉马努金心情更阴郁,他整个人是如此地摇摇欲坠。

大概就是在这个时候他进了马特洛克疗养院,这很难使他更加振作。典型的英国疗养院是由一些顽固的家长式的人

统治的，他们以铁腕强行严格的纪律。马特洛克疗养院就是这样的模式。一位去看望过他的人这样说：拉马努金完全被“拉姆医生(Dr. Ram)吓住了，他好像对拉马努金说过，‘只要您还是一个病人，还没有好，您就没有自由，医生会控制您的一切活动’”。

至少在地址偏僻这一点上，马特洛克也是典型的英国疗养院。布赖德在她关于英国结核病治疗的报告中写道，“有大量证据显示，疗养院的病人感到与世隔绝；不但是其地理上的孤立使来访困难因而稀少，而社会的态度又加深了这种孤立感。”马特洛克位于德比郡的皮克区(Peak District)，在伦敦西北150英里(约240千米)处。很少有人去看望拉马努金，因为去一趟不容易。他的朋友拉马林甘第二年写道，去看望他必须在夜班火车上忍受“寒冷而倦人的旅行”。在拉马林甘访问后的几个月，哈代写道“长期卧病以及比较孤寂”影响了拉马努金的心理状况，想必是指马特洛克这一段时间。

在马特洛克大多数时间，拉马努金寒冷孤苦。三一学院不给他研究助教职务使他痛心；加上重病在身不能在数学上继续有所建树，这也使他感到不幸；医生们不适合他；他得不到想吃的，能得到的他又不想吃；他真想吃热的 *dosai*——以前在贡伯戈纳姆时，安南塔拉曼的母亲给他做过的一种煎饼。最后，他几乎得不到家里在营养和感情上的支持，而且他也不能在哈代那里得到。

他变得深为沮丧。有一次，他做了一个噩梦，梦见自己的肚子变成数学的赘物来看望他，这个东西还有“奇点”，这就是空间中由不可定义的数学冲动表征的点，就像他和哈代在关于分划的工作中探讨的那些点一样。在  $x = 1$  处有剧烈的疼痛，在  $x = -1$  处则只有一半那么痛，诸如此类。这个噩梦一再出现。

拉马努金处在极度低潮之中,能否维系心理平衡的稳定,正处于千钧一发之际。

哈代并没有因受挫于三一学院而灰心失望,他还想使拉马努金振作起来,于是就着手让他的朋友得到他认为应该得到的承认。1917年12月6日,拉马努金被选入伦敦数学会。两周以后,即12月18日,哈代和另外11位数学家——包括霍布森和贝克在内,还有布罗米奇、李特尔伍德、福赛思以及怀特海(他与罗素合写了名著《数学原理》),他们一同于推荐书上签名,提名拉马努金为皇家学会会员(F.R.S.),这可是一项三一学院研究员职务远远不可比拟的荣誉。

皇家学会是英国最高权威的科学团体,1660年由雷恩和玻意耳(Robert Boyle<sup>\*</sup>)共同创立。当哈代提名拉马努金时,它共有39位外国会员,包括俄罗斯人巴甫洛夫(Ivan Pavlov),美国人迈克耳孙(Albert Michelson,他因迈克耳孙—莫雷实验而知名),还有另外6位诺贝尔奖得主。皇家学会有464名会员,分属物理、化学、生物学、数学等各个学科。成为一个F.R.S.就意味着这三个字母将永远写在您的名字后面,写在您的科学论文上,还写在寄给您的信上。这是科学殊荣的终极标志。年轻的科学家对此梦寐以求,而老科学家常因未得此殊荣而懊悔不已。

斯诺曾讲过威尔斯(H.G.Wells)的故事。威尔斯是《世界间的战争》(War of the Worlds)、《时间机器》(The Time Machine)和许多科幻小说的作者,也写了许多关于科学史与社会评论的严肃作品。尽管名声显赫又获得过种种荣誉,“但是有一项荣誉,”斯诺这样写他,“是他最渴望的。这要回溯到他的青年

\* 原书误为Boyles. —译者

时代,从那时起他就梦想自己将来成为一个科学家,成为一名 F.R.S.;岁月渐增,这个愿望不但没有淡化反而更加强烈。”他却一直没有得到。因为他虽然在学校里研究过科学,而且用斯诺的话说“对 20 世纪科学成就的设想,他所作的预言比任何人的都更有效”,但他自己并没有真正独创的研究成果。

哈代为他的朋友所求的就是这样一种非常的荣誉,为此,他用自己特有的字体手写了“推荐书”,它是这样开始的:

[他]以一个纯粹数学家而著称于世,特别是他关于椭圆函数和数论的研究。他是许多论文的作者,其中有:“模方程与  $\pi$  的逼近”,《数学季刊》45 卷;“黎曼函数  $\xi(s)$  与  $\zeta(t)$  的新表达式”,《数学季刊》46 卷;“高合数”,《伦敦数学会会刊》14 卷;……与哈代 F.R.S. 合写以下诸文:“ $n$  的划分数的一个渐近公式”,《综论》1917 年 1 月第 2 期……

推荐书中这样相继列出拉马努金的论文,而以可能是最重要的一篇——“组合分析中的渐近公式”(Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis)结尾,关于划分数的大论文还等着在《伦敦数学会会刊》上发表。

1918 年 1 月 24 日,拉马努金和其他 103 位候选人的名单在皇家学会的一次会议上宣读。如果过去的经验还有效,其中只有很少几个人可能当选。

在哈代、李特尔伍德和另外一些人心目中,拉马努金得到这个殊荣是没有问题的。然而极少有人能在第一次就胜出。按照通常的做法,他的提名是过早了。哈代 1910 年当选时,已经 33 岁。李特尔伍德在上一年 2 月才当选,也是 33 岁——距他青年时代就成为优等第一名,以后又发表了好几十篇出色的数学论文,已有 10 年了。拉马努金在提名时只有 29 岁,对欧洲的数学做出贡献才只有几年,发表论文的记录也有

限,至少在数量上是如此。

但是哈代对拉马努金的健康的关心促使他以不寻常的急迫心情提出申请。当时的皇家学会主席、电子的发现者、1906年诺贝尔奖获得者汤姆孙要求哈代概略地讲一讲与拉马努金的候选资格有关的情况。“如果他不是病成这样,我可能会推迟一年左右再提他,”哈代承认,“这并非他的能力对于申请有什么问题,而只是想让事情按通常的轨道进行,但是,我感到似乎再没有时间可丧失了。”

哈代的意思是说,拉马努金可能再也拖不到下一次选举了,皇家学会将会永远失去给他荣誉的机会。“我很急于把他推出来,”哈代继续说道:

而我很清楚,时下我并不是一个理想的支持者,我也知道,皇家学会还有许多别的事要考虑。但是无疑的是(特别在他未得研究助教职务时),这个震动人心的认可,现在对于他是一件大事。这会使他感到自己是一个成功者,而这是值得一试的。对于我来说,重要的正是这一点,而不是担心皇家学会会完全失去他。

我写这份推荐,是基于以下的假设,在任何情况下,他的申请终究是无法否定的。就我而言,这是显然的。他超出其他数学候选人一大截。

哈代的信提出了拉马努金内心极度痛苦的另一个原因:需要使他感到自己是一个成功者。由于哈代的鼓励,拉马努金终于理解了,他孤身一人在印度奋斗使他付出了多么大的代价。从他一走下轮船,他通过哈代才知道有多少东西他过去不知道,没有学过或者没有领会——有函数论,有柯西积分定理,还有那么多在西方视为普通知识,而他本来有权利在10年前就学会的东西。

“如果他在16岁而不是26岁就能见到现代的理论和方法,他的一生会是什么样,现在再来冥想这一点是没有用处

的,”哈代在拉马努金逝世以后这样写道,“设想他可以成为自己时代的最伟大的数学家也不为过。”

哈代指出,由于拉马努金在印度的研究工作,不可避免地会想到是这样,因为拉马努金是在一个“不可克服的障碍下工作的:一个孤苦无依的印度人在与世代积累的西方智慧拼脑子。”

下面是他关于拉马努金从离开政府学院到任职于马德拉斯港务信托处这几年所说的话:“一个数学家生涯中关键性的几年就是从 18 岁到 25 岁,损失已经造成了,拉马努金的天才再也得不到充分发展的机会了。”

由于哈代诚实到了完全不会掩饰的地步,他怎能不向拉马努金流露出自己的伤感呢?拉马努金又何尝感受不到这种情感无形中造成的伤害呢?

拉马努金对于哈代怎样努力使他成为皇家学会会员可能全不知情;如果他知道的话,则到了现在这个地步,他一定会以为这一切都是徒劳的,只能使他再次遭到羞辱,就如三一学院在 10 月份不给他研究员职务一样。

2月11日,拉马努金给印度家里写了一封信,结束了一年之久的音信阻隔,大约同时,或稍早一点,当拉马努金离马特洛克短期外出时,他曾企图自杀。

今天在伦敦您可以买一件 T 恤衫,一张招贴画,一个口杯或别的纪念品,上面都印有密如蛛网的地铁路线图,有十几条路线,上百个车站。1918 年 1 月或 2 月的一天,就在这个网络的某一个车站上——当时这车站可能比今天小些、新些,拉马努金突然迎着开来的火车,跳下轨道。

以后发生的事简直可以看成一个奇迹,一位守卫看见了,连忙拉下了一个闸门,火车尖叫着就停在离他几英尺之处。

拉马努金得救了，但已流了许多血，胫骨上留下了一道伤痕。

他被逮捕送到苏格兰场（即伦敦警察总署）。哈代被召来了，凭着他的魅力和学术地位，说站在警察面前的就是伟大的拉马努金先生，皇家学会会员，而皇家学会会员是不应该被抓的。

不过警察马上就弄清楚了：事实上拉马努金还不是皇家学会会员，但是他们研究了一下，明白了拉马努金确有著名数学家的名声，就让他走了。“我们苏格兰场的人并不想毁了他的……一生”，负责这个案件的警官后来这样说。

是什么触发了拉马努金绝望的一跳，今天我们并不知道。然而肯定的是，仅仅因为他请来吃晚饭的客人谢绝了他第三次上菜就曾激起他的羞辱感而起身离去，那么，更深的屈辱当然会引起更轻率的行动。在 1917 年，他确实又碰了钉子：他被三一学院拒绝了，他的妻子又似乎抛弃了他，留下他病在疗养院中，甚至想吃的东西都得不到。他又不能完成朋友们期待于他的研究工作，他又逐渐知晓自己过去的有些工作只是重复发现别人的成果，评价不高，白白浪费时间。

这一切像汹涌的怒潮冲垮了他，又没有一个安全阀门，至少是在他的英国朋友中没有。李特尔伍德走了；内维尔 1917 年失去了三一学院的研究职务，可能是由于他的反战观点，已离剑桥去了伦敦；而哈代又不是他能对之敞开胸怀一诉衷肠的人。

他很可能并非早已谋划要自杀，无疑，这是一时冲动，是旧怨加上某种我们今天无法知情的新的屈辱造成的。拉马努金又一次因不能忍受屈辱而卤莽行事。

2 月份稍晚，拉马努金回到马特洛克，于 18 日获悉他已入选剑桥哲学会，这不算什么荣誉，只是对他在科学界的地位

的- -种小小的合法化。

大约 10 天后,他得到哈代的一个电报,发自伦敦的皮卡迪利。

他把这份电报读了一遍。

他又读了第二遍。

他再读一遍,电报上的字都冻结在他头脑里了,就是看不出意思:哈代通知他的事,他早就知道了,即他入选哲学学会,这当然是好事,但他已经知道了,哈代还要发电报有什么意思呢?

他把电报又读了一次,这一次,两个新字猛然从纸上跳了出来——“皇家”,原来哈代通知他的并不是他当选了哲学学会会员而是皇家学会会员。

那一年 104 名候选人中只有 15 人当选,而他是其中之一。“言辞难表我的谢意,”他给哈代写信道,“我之当选梦中也难料及。”到了 5 月份,他已经是拉马努金 F.R.S. 了。

消息很快传到印度,使之震动。3 月 22 日印度数学会在马德拉斯的会员写信给哈代,感谢他“对拉马努金的帮助与指导”。塞舒·耶尔附言对他“在拉马努金健康不佳时的关切”致以个人的谢意。

5 月时,拉马努金健康仍不佳。他于 17 日由马特洛克致函皇家学会说他因病难以去伦敦参加正式的入会仪式。

大约此时,他收到拉马林甘的信,这人就是他从印度来时,才下船就在克伦威尔路的接待中心见到的南印度工程师。拉马林甘刚一宣战就从军了,早在 1916 年就已在贾罗 (Jarrow, 在英格兰北部几乎已到了苏格兰) 一家造船厂工作。1914 年以后,两人就没有接触过。而现在,可能是听到入选皇家学会的消息,就请哈代转信给拉马努金。没有得到回信,他又直接写信给哈代,知道了拉马努金的近况,就直接向马特

洛克写信给拉马努金。工程师拉马林甘就有这么一种执著劲。

很明显，拉马林甘一家人也是这样的脾气。拉马林甘在一封家信里提到食品的定量供应。就只是这么一封信，两个月之内，他的家人就把南印度的食品不断寄给他，最后他只好打电报说“请勿再寄食物”。现在，这些食品是一包接着一包几乎堆起来了。他写信给拉马努金，问他是否愿意分享一点“战利品”？

拉马努且回信要一点印度酥油，这是一种特殊的奶油，煮沸澄清后像油一样，还要了一些辛辣的马德拉斯食物，拉马林甘马上就给送去了。拉马林甘做了一件事又做第二件事，很快于6月16日星期日去马特洛克看望拉马努金，在那儿一直呆到星期二午饭以后。他们谈了3天——谈战争，谈基督教的传教，谈印度的情况，还有许多别的事。拉马林甘曾听说拉马努金心理受了伤害，但这一次却一点迹象也没有看出来。

然而他的身体状况却是另一回事了。他在回贾罗后写信给哈代说：“我感到十分震惊，他竟然如此形销骨立，憔悴委顿。”然后就一一诉说他的病，他的自杀企图，马特洛克的食物问题。

拉马林甘的信用宽行大纸写了12页，列举拉马努金的情况，记录医生的看法，详述他的食物情况，建议改进对他的照顾。但是全信之中没有说过一句这样的话：“您无疑知道……”、“拉马努金可能告诉过您……”或者“拉马努金可能在您上次去看望他时已对您说过了……”之类。他在这3天中从拉马努金处得知的一切使他没有理由把信写得稍短一点，或者暗示哈代已经知道某事。这信读起来倒像是一个中层经理人员给上级的报告，而且假设这位上级对所讨论的事一无所知。

拉马林甘的信虽长,却有一个很明确的中心:“这就是食物问题,我可能用词过于激烈,信也太长,”拉马林甘写道。他甚至说,拉马努金在用饥饿慢性自杀。

饮食问题在疗养院的“治疗”中占了一大部分。结核病英文称为 *consumptives*, *consume* 即消耗之意,因此结核病就是一种消耗人的病。几乎肯定的是,体重下降总伴随着它,因此一种普遍的观念就是:使病人壮实起来就能延续或扭转疾病的进程。

早餐,马特洛克给病人吃炒鸡蛋和烤面包加茶,午餐则有米饭、辣椒、奶油煎过的芥末、黄瓜、柠檬,有时还有青豆。不管吃什么,什么都让人讨厌,厨师经常把饭做得一塌糊涂。在拉马林甘走后第二天,拉马努金就写信给他,抱怨新来的厨师把 *appalapu*——一种用米粉做的在油或印度酥油里煎过的食物——做糟了:有的糊了,有的还是生的;“咖喱饭”,他还特别用泰米尔文拼写,“做得就像是 *akshata*”——一种祭祀用的生饭,不是给人吃的。煮米饭:这个可怜的女人连这都做不好。

疗养院尽管声称优先注意定量配给的食品,却似乎总不肯给拉马努金搞一些他喜欢吃的东西,例如香蕉,还有奶酪,用来拌通心粉。奶酪是他喜欢的,后来拉马林甘给他送了一些去。至于奶油,由于战时物价上涨,所以马特洛克总在发牢骚说他要奶油煎土豆。

拉马林甘看出来,总得想点办法。当他在疗养院时,他问能不能自己下厨给他的朋友做一些吃的。人家告诉他:“不行,您不能到厨房去”;他又问能不能写一些烹调法让厨师照着做?这个建议也被拒绝了。

当然,疗养院听惯了病人抱怨饭做得不好,而且一般认为这种抱怨正是病态的表现。结核病人被认为是特别爱挑剔

的。例如有一个病人告状到卫生部，却被批了一段：“这种多有偏见的气质有时会发现与其病状有关：使他急躁而对执行纪律不满。”

拉马林甘也看出来，真正的问题是拉马努金的顽固。“他总在想着要吃素，连健康与生命也不顾，”他给哈代的信中写道，“当他拒绝要奶油而要上面加几个梅子，这时只能认为他是刁钻而任性。”同一天他也给拉马努金写信，直截了当地说了话：

我只好对您讲几句不客气的话了，我与拉姆医生谈了话，自己又想了一下，我觉得您在口味上太挑剔。您必须做一个选择……要么控制自己的口味，要么害死自己。您必须试着习惯吃粥、麦片、奶油等等。我的朋友强烈要求我不让您吃泡菜和辣椒……

我并没有走到另一个极端让您吃牛肉茶或牛肉精，考虑到您的生命，要您吃这些东西也是可以原谅的；不仅如此，而是有益的，甚至是不可避免的。讲点道理吧，不要再执拗了。

如果还有什么时候需要他放弃素食的话，现在就是时候了，正统的犹太人也有些东西不准吃，但是当健康可能受到损害时，犹太人的饮食教规是可以放松的。但是婆罗门的规矩可不准有这些特例，拉马努金当然也不想成为特例。

一段时间以前，当时甚至还没有进马特洛克，拉马努金有一次能在医院外偶尔呆上一段时间，住在伦敦一家为印度人包伙的住处。早餐时饮用一种饮料，其商品名为阿华田（Ovaltine），当时别人对他说是素的。那天后来他闲着看看阿华田罐子，在成分表上看见有动物制品的某些迹象。他为此感到极大耻辱，非走不可了。他突然打好包，走出了门；这正是维沙卡帕特南和查特吉晚餐事件的重演。

这一次当他走近利物浦车站，准备搭火车去剑桥时，飞得

很高听不见声音的一队德国齐柏林飞艇飞来，炸弹如雨点般倾泻而下。很可能就是1917年10月19日那一次空袭，死亡27人。有一个炸弹恰好掉在一排工人住房后面，炸毁了3栋房子，炸死了4名妇女和8个孩子。然而拉马努金却认为这是因为他喝了阿华田而对他个人的惩罚，后来他写信给女房东解释何以突然离去时，讲了这次空袭。一位后来听到这件事的朋友说，他在信中说这次空袭是“神因为他破了荤而对他施以处罚”。

不管怎么说，拉马努金更挑剔了。有一段时间他主要只吃面包和牛奶；现在他连这些都不吃了。他也不肯吃马特洛克的粥；他只要南印度食物。

拉马林甘要他“讲点道理”。但是任什么“道理”都对付不过英国烹调之淡而无味这一现实。甚至拉马努金那些不甚挑剔的印度朋友，甚至那些完全放弃吃素的人，都可能告诉过他所有欧洲人都知道的事实——英国的饭，量太多，又做得不好，淡而无味，重复单调简直令人发狂。甘地也是一位素食者，他访英比拉马努金早了一代人的时间，他也写道：“甚至我能吃的菜都是淡而无味的。”内维尔后来回忆说：“我知道他是真心真意地要求吃饭就吃面包和果酱，因为给他的蔬菜他都觉得很怪而且不合口味。”

拉马林甘访问马特洛克以后，金凯德医生(Dr. Kincaid)的话一直使他心绪不宁。医生对他说，拉马努金爱吃什么就让他吃什么吧，甚至泡菜和辣椒也行。然而拉马林甘认为，结核病人本不该吃这类东西——除非他们已不久人世。他给哈代写道：

当病人已病入膏肓回天乏术时，当余生仅以数周或数月计时，[吃什么东西]都不相干了，只望病人在其最后时刻能感到愉快舒适即可。金凯德医生让我什么都给拉马努

金吃，其意是否在此？

念及如拉马努金有如此才能与杰出贡献者，我们束手无策一至于此，实在痛心之极。战争及其恐怖已使我们对大规模屠杀与生命之丧失无动于衷，然而如拉马努金这样的人也应该放弃么？

## 11. 从记忆中溜掉了

1918年秋，拉马努金的名字又一次被提到三一学院申请研究职务，哈代现在与拉马努金关系如此密切，又深深卷入三一学院的政争之中，这一次不该再由哈代去为他提名了。所以李特尔伍德（他因工作过度疲劳，又得了脑震荡，回来一段时间）就来提名。引起争论的是种族问题，李特尔伍德后来写道，有一个拉马努金的对头，“到处公开乱说，他决不让一个黑人做研究人员”。

他想要自杀的事传遍了剑桥，拉马努金的反对者就抓住这件事。学院的细则不是明白规定要求“精神状态良好健康”吗？自杀一事岂非证明拉马努金就此尚有欠缺？李特尔伍德的朋友和以前的 *Tripos* 教练赫尔曼（R. A. Herman）告诉他：“关于拉马努金的精神状态存在严重的怀疑。”

李特尔伍德因自己的身体情况不能亲自出席，对于这些传闻就写了一个报告并附上两份医学鉴定证明拉马努金精神状况无问题。

“这显然震动了选举委员会的一般成员，”李特尔伍德后来写道，“有人提议不必读这些鉴定，而且提议就通过了。”于是选举就按照拉马努金的成绩来进行。当然，拉马努金有一个最有利于他的论据——这就是现在他的名字后面已加上三个字母的尊称：F.R.S.；皇家学会会员还不能当三一学院的

研究员，这简直是一件丑闻。“您不能拒绝一个 F.R.S.”李特尔伍德告诉赫尔曼，他是反对拉马努金的。“不能拒绝。”赫尔曼答道，“但我觉得这是一个阴谋诡计。”可以想像得到，李特尔伍德只有一笑置之。

拉马努金现在已经从马特洛克出来了。拉马林甘写信告诉哈代，他愿去伦敦，因为比较容易买到印度食品，可能人们来看望他也比较方便。拉马林甘觉得这并不是一个好主意，空袭怎么办？他倒建议拉马努金到意大利的南部或法国南部休养，那里的气候对他比较好，至少也不像英国那样容易遭到袭击。

但是拉马努金自己作了主，在得知三一学院已批准给他研究职务后，就住进了伦敦一家小医院，名为菲茨罗伊屋（Fitzroy House），那里可以俯视伦敦市中心一个很匀称的小广场。肖伯纳（George Bernard Shaw）19世纪90年代在此住过，弗吉妮亚·吴尔夫1911年前也在此住了4年。这是一座5层的街市楼房，一个椭圆形的盘旋楼梯立在建筑中央，有一个巨大的门，好像一座城堡的大门。拉马努金住在这里时，看过好几个专家，但仍如以往，不能确诊，阵阵高烧不规则地爆发，他身上疼痛找不到原因。他拔了一颗牙，有一个医生就把他的疼痛归之于此。

“对您善意的电报我衷心感谢。”拉马努金听到好消息后从菲茨罗伊屋给哈代回信说，“您成功助我入选皇家学会后，再入选三一学院困难可能少多了。”

他是在一个星期五，可能是10月18日写这封信的。第二个星期一，他意犹未尽，又给哈代写信：“请向李特尔伍德和麦克马洪少校转达我的谢忱。若无您的努力与他们的鼓励，这两项选举我一项也不会成功。”然后他又问了一下关于研究职务的细节。

这是第一段,到第二段就这样开始了:“我或多或少详细地考虑了  $p(n)$  以及一般的  $p_r(n)$  之同余性……用了四种不同方法。”第一种方法依赖于一个“您即将发表的结果……”

哈代早就预料到,授予他这两项荣誉,特别是 F.R.S. 将会使他振作起来——导致内维尔所说的“光辉发明的短暂时期”,大约始自 1918 年春。拉马努金提到一篇两周前送交剑桥哲学学会的文章,是这一时期盛开的奇葩。

此文是这样开始的:“哈代先生和我新近的一篇文章”,这里讲的是他们在同年早些时合作发表的一篇论文。

文中包含了由麦克马洪少校计算的  $p(n)$  值表。 $p(n)$  即  $n$  之无限制分划的数目,  $n$  自 1 直到 200, 研究此表中的数,我看出了  $p(n)$  显然适合的一些同余性质,如

$$(1) \quad p(4), p(9), p(14), p(19), \dots \equiv 0 \pmod{5}$$

$$(2) \quad p(5), p(12), p(19), p(26), \dots \equiv 0 \pmod{7}$$

如此等等写满了一页。

此文题为“ $n$  的分划数  $p(n)$  的某些性质”。它之所以重要是因为,分划函数之绝大部分性质都没有被发现过。回忆一下,所谓  $n$  的分划数  $p(n)$  是用正整数加起来可以得到  $n$  的方法的个数。但是如此基本的性质,如  $p(n)$  为奇为偶,数学家都搞不清楚。

拉马努金所说的表是一串又长又枯燥的数字,原是两年前由麦克马洪用手工辛辛苦苦算出来的;一直算到了  $p(200)$  之值。拉马努金和哈代是用它来作为验证  $p(n)$  的一般公式的标准。但后来拉马努金深入考察了这个似乎什么也生不出来的表,他的想像力出现了一次大飞跃,并在许多年中一直让数学家们为之震惊。

为了说明他看出了什么,拉马努金用了“同余”这个词,它

是用来表示可除性的。所谓两个数同余，就是说当用某数去除它们时，余数相同（余数可以是0）。例如取一个直接的除法

$$14 \div 7 = 2$$

用同余的语言来表达，我们就说

$$14 \equiv 0 \pmod{7}$$

就是说，当14用7（就是上面说的“某数”，这时称为“模数”）去除，其余数为0。又如

$$15 \equiv 1 \pmod{7}$$

就表示15用模数7去除时，余数为1。说22与15模7同余，意思是22用7除时余数也是1。

哈代在他与赖特(E. M. Wright)合写的《数论引论》(An Introduction to the Theory of Numbers)中这样说：“在日常生活中，同余大有实际重要性，例如‘今天星期六’就是一个同余性质( $\pmod{7}$ )；就是说从某一个固定的日子算起，算到今天的日数，与算到某一个星期六的日数模7同余。……课程表和铁路时刻表都是同余表；课程表是讲的模365,7和24。”\*

拉马努金在麦克马洪的表中看出了一些固定的但很隐晦的模式，用同余表表示最好。例如，他发现了

$$p(5m + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

不管 $m$ 取什么值，不管您得到的 $5m + 4$ 是什么，拉马努金证明了其分划数一定可用5整除。例如取 $m = 0$ ，则 $5m + 4$ 是4；4的分划数是几？答案是5；5可否被5整除？当然可以。您也可以令 $m = 1\,000\,000$ ，并问 $p(5\,000\,004)$ 是多少。对这个天文数字到底是什么，没有一点线索，但是可以绝对有把握地

\* 这里讲的课程表是每年相同的，所以是( $\pmod{365}$ )；总在每周同一天上，所以( $\pmod{7}$ )；总在一天固定钟点上，所以是( $\pmod{24}$ )。这段文字稍有修改。——译者

说,它能被 5 整除。拉马努金也得到了一个类似的恒等式,说  $p(7m+5)$  可以用 7 整除。现在,在提交给剑桥哲学学会的论文中,他证明了这些结果,还猜测了另外一些,其中之一在当年稍晚些时就证出来了。

哲学会在收到拉马努金关于同余性的文章的同一天,还收到他的另一篇文章,而那篇文章给拉马努金在英国的研究工作画上了一个句号,既证实了他的天才,也表明他的数学生涯已失去潜力。

第二篇文章可追溯到两个惊人的恒等式,这些是他 1913 年前就已发现,并且后来寄给哈代的。「恒等式就是这样一个方程式,不论其中的变量取什么值它都是对的,像  $x - 2 = 3$  就不是恒等式,它只是一个普通的方程式,它只在  $x = 5$  时成立;而  $(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$  对  $x$  的每个值都成立,所以是恒等式。」其中之一是:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{q}{(1-q)} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)} + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \dots \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{13})(1-q^{14})(1-q^{16})(1-q^{19})\dots} \end{aligned}$$

另一个形状也类似。拉马努金到英国后的某个时候,可能在 1915 年,麦克马洪从中看出了一些拉马努金没有看到的东西——又是某种与分划有关的东西。

研究堆垒数论(这是这个领域的正式名称)的人,不仅对一般的分划数有兴趣,而且对其某些类有兴趣。取 10 这个数,它的分划数——现在有必要更精确一些了,说它的“无限制”分划数——是 42,其中包含了例如下面两个分划

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$$

和

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10$$

但是可以问,如果加上一个新的要求,即构成这个分划的各数至少相差 2,这两个分划就被除掉了。这时又怎么样?例如

$$8 + 2 = 10$$

以及

$$6 + 3 + 1 = 10$$

都是合格的,另外合格的还有 4 个,总共有 6 个。10 的其他 36 个分划中,至少有一对数相差小于 2,因此不合格。

这是一类分划。还有一类是由另一个与此相排斥的办法构成的:如果要求适合特定代数形式时,其分划又如何?例如,限制分划的各个成分都是  $5m+1$  或  $5m+4$ ( $m$  是正整数)怎么样?如果要求这样,则分划

$$6 + 3 + 1 = 10$$

就不合格了,因为构成分划的各个数并不都满足这个条件。其中 6 这个成分是可以的,它可以写成  $5m+1$  其中  $m=1$ 。上式中的 1 也是可以的,它可以看作  $5m+1$  其中  $m=0$ ;但 3 又怎样?不论  $m$  取什么值,从  $5m+1$  与  $5m+4$  中都出不来 3(这两者产生的数最后一位必是 1,4,6,9)。

有一个合格的分划是

$$6 + 4 = 10$$

另一个是

$$4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$$

每一个都适合那个代数要求,合格的分划共 6 个。

6 恰好也是适合第一个范畴的分划数,只不过,这不是“恰好”,它总是这样的,任取一个数,把满足“最小差为 2”这个要求的分划放在一起,把适合“ $5m+1$  或  $5m+4$ ”这个要求的分划也放在一起,比较它们的数目,每一次都是相同的。

这就是拉马努金恒等式。适当地加以解释,它就揭示了:

两个似乎不相同的数学子区域，存在着一个统一的关系。麦克马洪在他出版于 1916 年的《组合分析》(Combinatory Analysis)一书第二卷中，曾专门有一章讲这个“拉马努金恒等式”和其他的恒等式。他用合理的力所能及的大量手工计算来验证它，“以致实际上没有理由对它是真的产生怀疑；但是，”他加上一句，“至今还没有”形式证明。

然而实际上早就有了证明，是在 20 年前发表的一篇论文中。

1916 年或 1917 年的某一天，拉马努金在翻阅《伦敦数学学会会刊》1894 年那一卷时，在 318 页底部看见了它，这篇论文题为“关于某些无穷乘积的展开式的第二个备忘录”，其中有两个无穷乘积正是他以为是自己发现的恒等式。在麦克马洪的书出版以前，哈代曾把拉马努金的恒等式给人看过，有谁知道这些漂亮定理的证明吗？有谁能提出一个证明吗？谁也不行。但是现在白纸黑字，如同幽灵从过去钻了出来，显现过去已经有人证明它了。

哈代谈到拉马努金看到这些老论文时说：“我还很清楚地记得他的惊异，以及他所表现出来的羡慕心情。”他是否有某种失落感，甚至某些又苦又甜的矛盾心情，哈代可没有说。

那位超前于拉马努金的人是罗杰斯。如果世上真有杰出的人，罗杰斯就算其中之一了。他于 1862 年生于牛津，父亲是那里的一位经济学家，他不仅在与剑桥的 Tripos 相当的牛津竞赛中成绩出色，还在 1884 年得到一个音乐学士学位。他是一位很好的钢琴家，有超常的摹仿能力，喜欢学着说约克郡方言。他会织毛衣，会滑冰，善园艺，他是一个天生的语言学家。关于他，有人说，“可以肯定”：

对于他那样一个人，掌握各种语言轻而易举，思想敏捷，十分机智，仪表良好；如运动员一样的优雅风度，谦和而

又庄重的魅力使得没有一个妇女能不动心，这样一个人，没有一个外交职务是他得不到的。然而，世人所谓的成功，他可一样也没有得到。

罗杰斯按气质说是一个有才华的业余爱好者，尽管能力很强，却从未一心一意地追求数学生涯，而这种一心一意，不论在过去还是现在，要想出人头地都是必不可少的。“他各种事情都会做，而且都做得很好。因为他喜欢做这些事。但是他从来没有事业的前途，对于他人的数学工作，他的知识很模糊。他绝无野心，不想出人头地。”

甚至在拉马努金重新发现他以前，他也并非如其讣告所说是一个在数学上无关紧要的人。他在一个大学（即后来的利兹大学）担任数学教授多年，他发表了不少论文使他颇有名气。然而，他有这么一种本事，就是作出很值得注意的贡献，然后马上（至少在短时期内）被人遗忘。例如，3年前《伦敦数学会会刊》上发表过一条如下的更正：

罗杰斯教授在“On the Quinquissectional Equation”（《伦敦数学会会刊》，32卷，第199~207页）一文中给出了这个方程的显式。我很遗憾本应在此文发表时，读过罗杰斯教授的大作，但它从我的记忆中溜掉了，以致我宣称它自从凯莱在第12卷中讨论这个问题后，再没有人研究它。

这一次的恒等式，后来称为罗杰斯—拉马努金恒等式。哈代后来说，罗杰斯原来的恒等式只是“一系列更一般的定理的推论，可能正是因此而未为人注意，尽管它们本身显然是有趣而且漂亮的”。再则，它的证明也太难，罗杰斯的美感并未延伸到他用文字写的东西中。

无论如何，确实有过这样的恒等式。

通信仍在继续。当麦克马洪1916年4月写下他的书的最后一章时，他还说拉马努金恒等式尚未得证。现在白纸黑

字,这句话说错了,麦克马洪就写信给罗杰斯。后来,罗杰斯回忆道:“当他发现忽视了我的公式时,他非常遗憾,可惜为时已太晚了。”1917年10月,罗杰斯又寄给麦克马洪一个新的简证。1918年4月,拉马努金又给哈代寄去了自己的证明,当时他大概还在马特洛克。

1918年10月28日,在剑桥哲学学会年会上宣读了这两个证明,还有拉马努金关于同余性的重要论文。

两周以后,第一次世界大战结束。

布尔什维克革命使得面对德军的俄罗斯军队崩溃。德军从东线上撤出,但留下了100万军队,然后横扫中欧,矛头直指巴黎。和1914年一样,德军又陈兵马恩河畔,巴黎又一次在望。但这一次有点不同,100万美国生力军到达法国。德国人打了几年仗已经精疲力竭,向后撤退,随即求和。1918年11月11日发布了停火令。

按《剑桥评论》的说法,很快“在集市地上点起战前著名的篝火,烧的主要是包装箱,人们翩翩起舞,但跳舞的并不都是以前那些有两条健全大腿的人”。那天下午1点,吉尔顿学院有些女士也来参加狂欢,她们通常都隐居在城边缘的学院校园中不大与人来往。傍晚5点,许多人来国王学院小教堂参加感恩节礼拜。有一个参加礼拜的人写道:“当我们站在那个美丽教堂的昏暗烛光下时,似乎大地和苍穹再也不能分离,时间与永恒也融为一体了。”

11月26日,哈代写信给马德拉斯的迪尤斯伯里,讲到拉马努金,他写道:“我想,现在到时候了,应该重新考虑他暂时回到印度的问题,以及关于他的未来的一般问题了。”

## 第八章

## “健康状况尚好”

(1918以后)

### 1. “整个世界好像都年轻了”

拉马努金身体似乎好起来了。哈代在给迪尤斯伯里的信中说他“正在真正康复的路上”。他体重似乎增加了15磅(约7千克)，体温也稳定了。医生们似乎更赞成说他的病因是血液中毒，而这种毒现在似乎已经“干了”。

那么，岂不是到拉马努金回印度的时候了吗？反对的理由都不存在了，海路安全了，他来英国定下的目标都达到了。三一学院的研究职务并不要求他定居于此。皇家学会的资格已不再是空中楼阁，他用不着盯在这里了。按这样的想法，拉马努金既然在好转，又何必把他留在英国反而延误他的康复呢？

当然幕后的活动更多。哈代写道：“有一些朋友直接找到他，用意很明显（想让他回去），我想，提建议的方式可能还不够聪明；不论怎么说，似乎反而使他不想走了。”他们说的话可能按动了他身上许许多多电钮的哪一个。哈代深知拉马努金的敏感，又不想去触动它，于是向迪尤斯伯里提议：“最好或多或少以官方的名义同时给他和给我写信。”并在大学中给拉马努金提供一个职务，使他有时间去做研究工作，并且不时访问英国和他哈代本人，这样做有利于他回印度，而且拉马努金肯定也是愿意回国的。

哈代的信还有一个附笔，说今年早些时在地铁跳轨的精神疾病并未完全治愈。“他回到印度时其科学上的地位和名望还没有一个印度人曾经有过，我相信印度会把他看成一个恰如其身份那样的珍宝。他天生的单纯与谦逊一点也没有因他的成功而受影响，”他加上一句——“说实在话，真正需要的是让他认识到自己确实已是一个成功者。”

拉马努金还以为他不是成功者吗？到了 1918 年 11 月仍如此吗？过去 4 年中发表了将近 20 篇重要论文；名字后面已加上了 F.R.S. 三个字母；在三一学院的研究职务也已确定；这一切还不足以说服他自己吗？在公众中，拉马努金表现出一种不令人喜欢的南印度式的谦虚。但在内心里，他要求的还更多。是向哈代要求更多吗？战争已经使拉马努金更加依赖于哈代了，而哈代对他的鼓励是否表里不一，在内心比在表面更加吝啬，彼此更加隔膜分离？

不论怎么说，使拉马努金次年回到印度的车轮已经启动。但是他之所以回国确实是因为更加健康了吗？还是因为实际上更差了，而在英国康复的机会更是遥远？他的一个印度传记作者至少是这样暗示的：“拉马努金先生的病到 1918 年圣诞节时更严重了，这使他的英国医生十分焦急，为了他尽快好转，他们劝他早一点回印度老家去。”这是塞舒·耶尔写的，所讲的时间离哈代写信给迪尤斯伯里只有一个月。

不管拉马努金的身体出了什么问题，是恢复也好，是衰退也好，都缓慢如冰河解冻——他的病情起伏不定，可以因人而异地加以解释。所以也可能他之所以回印度，并不是由于健康上有什么大的变化，很简单就是因为战争结束了。

停火后的几周或几个月是一个结束与开始的交替时期。在浸透了鲜血的整个欧洲土地上，洋溢着解脱之感。街灯又

亮了起来，12月7日，英国人又获得了做蛋糕和面点的权利，还可以在上面涂满巧克力，这使他们从内心感到满足。定量配给制度还在继续，有些物品一直定量到1920年，但是1918年的圣诞节分配了双份的肉。12月9日军人开始复员。

在战争期间，剑桥有2162人阵亡，伤者近3000——占从军者的三分之一。在4年中总计约有80000伤兵由火车送到剑桥。而现在，在战争结束的几个月内，大学正恢复到过去的规模。

1914年把拉马努金送到英国的英印海运公司轮船“内瓦萨号”又重新载运旅客了。战争时期，它成了一艘运兵船。后来，它的烟囱刷成了黄色，白色的船壳上刷了一条宽宽的绿带，它又成了一艘医院船。有660个床位，在两年时间中运送伤员来往于苏伊士、巴士拉\*和孟买之间。后来，又作为运兵船，运送美国士兵去法国，期间至少有两次逃脱了潜艇攻击。现在，在1919年，它又重新成了一艘客船。

哈代的朋友，历史学家特里维廉也回到了英国“继续写历史书。我在生活中再没有别的雄心壮志了。我们曾经容忍了至少一代人关于全面大战的愉快的幻想，最终产生了一种追求家庭与个人欢乐的热情。我永远忘不了1919年复活节时和妻子和孩子们在康瓦里度假时的欢乐与振奋，整个世界好像都年轻了。沙滩与海岬上的岩石都随之快乐”。

停战时拉马努金已离开菲茨罗伊广场去了另一家疗养所，位于普特尼(Putney)郊区，在伦敦东南方几英里处，泰晤士河南岸。

这个疗养所称为柯林内特屋(Colinette House)。从外表

\* 巴士拉，伊拉克港口。——译者

看，这是一所方盒子形的不起眼的大房子，是在 19 世纪 80 年代向郊区发展时期造的一座四望独立的房子的一部分。吴尔夫几年前从锡兰回来时，曾在一所这样的房子里住过几年，感觉到与他已经熟悉的在印度的英国侨民的奢侈生活相比是太寒酸了。然而，这房子内部还是比较华丽，装饰了一些精致的塑像，彩色玻璃，华丽宽大的房间和漂亮的盘旋楼梯。到拉马努金住进去的时候这座位于柯林内特路 2 号的有 8 间卧室的大房子已改造成了一个小疗养所，由一个名为萨姆尔·曼德维尔·菲利普斯 (Samuel Mandeville Phillips) 的人管理。

与马特洛克相比，到这里找拉马努金容易多了。哈代（他的母亲于停战后几个星期死于克兰利）去看他也更容易了。只要坐两个小时火车，再乘出租车就到了。有一次哈代去看望拉马努金，在伦敦乘坐的出租车车号 1729 引起了哈代的注意。他一定琢磨了好一会儿，因为他走进拉马努金的房间时，拉马努金正躺在床上，而他招呼也没有来得及打，就冲口而出对这个数字表示不满。他说：“这是一个毫无意义的数，”还加上一句说，他希望这不是一个恶兆。

“不，哈代，”拉马努金说，“它是一个非常有意思的数，在一切可以用两种不同方式表示成为两数立方之和的数中，它是最小的一个。”

找一个可以表示为两数立方之和的数是容易的。例如  $2^3 + 3^3 = 35$ 。但是 35 还可以表示为另外一对立方数的和吗？不可以。把整数一个一个拿来试，就会得到这个结果了。有时会得到一对立方之和，但绝不会是两对立方之和——一直计算到 1729，它既等于  $12^3 + 1^3$ ，也等于  $10^3 + 9^3$ 。

拉马努金是怎么看出来的呢？这当然不会是顿悟。好几年前，他就看到了这个算术小品，并且记在他的笔记本上。请记住，他的“商标”就是他很容易地与数字亲密无间。

当拉马努金住在柯林内特屋时，他得到了几个好消息。整个大战期间，马德拉斯当局一直通过哈代与他保持联系，一次又一次按时从港务信托处与马德拉斯大学为他续假。1917年拉马努金的母亲来到马德拉斯，得知她的儿子将被任命为大学教授的研究职务，月薪至少400卢比——是他离印前作为研究学者收入之6倍。由于他现在是F.R.S.了，马德拉斯当局极力献殷勤想为他做些什么事。1918年12月末或者新年之初，他得知马德拉斯大学将给他一笔每年250镑的研究经费，为期6年。这还不包括三一学院给他的研究经费。这样他可以定期回英国。

对贡伯戈纳姆的日子，拉马努金记忆犹新。那时他没了奖学金，只好离开学校。还记得只是由于拉马钱德拉·拉奥的资助以及做辅导教师赚那么几个卢比才能勉强糊口。此外，他也因为最近一年半没有做出什么而感到不好意思，所以1919年1月11日写信给迪尤斯伯里：

先生：

1918年12月9日来示奉悉。余谨接受大学所给的慷慨资助，并深致谢忱。

尚有念者为，余当立即安排妥当回到印度，大学付余之薪资远超出余之所需。余敢于期望者为，在付清英国之费用后，余仅需每年付双亲50英镑以维生计；其多余之数，除日常必须之费用外，盼能用于教育事业，特别是为贫苦青年学子与孤儿交付学费，并购置彼等在学校所需之书籍。凡此自可在回印后再做安排。

犹有憾者，近来身体欠佳，近两年来已不能一如往昔全力投身数学研究，然切切期盼于心者，仅在于多做工作以不负厚望。

您最恭顺的仆人  
拉马努金谨上

大约一个月以后，2月24日星期一，拉马努金已恢复到可以去办理护照事务了。书记员记录下有关信息“年龄：30；职业：研究生”。当他坐下拍护照照片时，他抬起了头，直直的黑发梳向一边，发亮的眼睛一直盯着照相机。他照出一个好莱坞式的漂亮形象，已不是在印度的朋友所认识的拉马努金了，也不是哈代在1914年认得的拉马努金了，而是一个满面病容消瘦憔悴的人。他的衬衣一直扣到领口，在颈部是松松的；他的外衣，已不如过去那样因身上的层层脂肪而绷得紧紧的——现在仍然不合身，不过是朝另一个方向，颈部和肩部都大了两号。

大约两周后，拉马努金另两篇短文于1919年3月13日发表在《伦敦数学会会刊》上。其中他给出了分划函数的新的同余性质，以及第一和第二罗杰斯—拉马努金恒等式之间的新联系。同一天，他为了轻装，把自己的笔记本和其他论文留在哈代处。但同时，他又增加了新的拖累，多了至少一打书，为弟弟们买了一箱葡萄干，还有一个大皮箱装满了各种论文。收拾停当后，他就登上太平洋与东方海运公司的“名古屋号”轮船。

“名古屋号”和“内瓦萨号”一样属于船龄最短的新轮，只不过稍小一些，正向孟买驶去。

血洗欧洲的那场冲突也使印度受到伤害。事实上，马德拉斯就曾经是攻击的目标。一宣战，德国轻巡洋舰埃姆登号就攻击印度洋上的航线，掠夺战利品，击沉商船。一天夜晚，埃姆登号突然出现在马德拉斯外海，码头上灯火通明，也不管有没有战争，照亮了缅甸石油公司(Burma Oil Company)漆了红带的白色储油桶。英国官员得到错误的信息以为埃姆登号已经沉没了，正举行晚宴庆祝。这时，德国掠夺者开始炮击码

头,油桶着火了。晚些时,从 90 英里(约 145 千米)外的海上还看得见火光冲天。

这次攻击没有什么战略上的影响,但在当地居民中造成了恐慌,可能也包括拉马努金的父母和妻子。许多当地人害怕埃姆登号再来,都逃出了城。

战争使印度兵力空虚,只留下 15 000 英兵。招募了将近 150 万志愿军人,其中许多人,至少在马德拉斯,来自不可接触者这个最低的种姓。当地的招募者许诺:“只要穿上国王—皇帝的制服,就可以在婆罗门地区走来走去,爱在哪里吐痰都行。”

在政治上,这是一个大踏步走向独立的年代。1915 年,英国社会改革家,马德拉斯的神智学会(Theosophical Society)主席贝赞特(Annie Besant)夫人开始鼓吹自治,发行了她的报纸《新印度》(New India),成立了自治联盟(Home Rule League)。同年甘地回到印度,他在南非提倡人民不合作的非暴力方法,保护南非的印度移民,因而名声大振,现在他也发起了群众运动。5 年后,他成了印度国民大会党的主席。

变革——种姓制度的削弱,印度人民的觉醒,印度民族主义的复活,固有的印度方式的重新发现——这表明在拉马努金去国的年代,整个印度大陆巨人感到了自己的力量。

印度的知识分子也感到了这股力量。1916 年 12 月末,印度数学会在马德拉斯召开第一次会议,彭特兰勋爵莅临开幕式,在王公学院的台阶上受到学会第四任主席拉马钱德拉·拉奥的欢迎。彭特兰勋爵告诉大会说:“现在,一个年轻的印度人,拉马努金先生”——听众中爆发出了欢呼声——“正在剑桥学习,我们在南印度的人对他的生活深为关切并寄予厚望。你们都知道他的非凡才能被发现的经过,所有与会者都会高兴地知道,他完全没有辜负人们为使其才能充分发挥所做的

努力。”

现在每个人都知道了他的故事。其实早在 1914 年 5 月，“内瓦萨号”载他远行的两个月以后，拉马努金就已受到马德拉斯报纸的称颂：

马德拉斯的拉马努金先生现在正在三一学院，他在高等数学上的研究工作已引起剑桥人的好奇。他主要是随该学院的两位研究员——哈代先生和李特尔伍德先生一同切磋。他们两人正在研究他已做的大量工作，拉马努金先生在其中作出了惊人的发现。

当他得到学位时，他们在家里都知道；当他被选为皇家学会会员时，王公学院举行了庆祝会，在他缺席的情况下，还铺了红地毯。他在帕协阿帕学院的一位同班同学钱伽尔瓦拉扬(K. Chengalvarayan)后来回忆起那些年与老同学见面时说：“拉马努金的成名是一个最常谈论的话题。”

拉马努金到达孟买前两周，印度数学会召开了第二次会议。拉马努金的“光辉的生涯”，他的“卑微的出身”，他的“身为皇家学会会员”等等，离不开每个发言者的口。他回来得真不是时候，当时正是一场流感的高潮，而这次流感夺走了 1000 万人的生命，连数学会会员中也有 5 个人丧生。拉马努金出国期间去世的还有王公学院的数学教授米德尔马斯特，他曾是拉马努金的最早推荐者之一，去世时年仅 42 岁；还有他在帕协阿帕学院的数学教授马德利亚。

学会杂志 1919 年 4 月 1 日的那一期，首次刊登了拉马努金回国的消息。但是它说拉马努金回国时“健康状况尚好”。

## 2. 回到高韦里河

“她在哪里？”拉马努金一下船走上孟买码头就问他的母

亲,那是1919年3月27日。“她”就是指佳娜琪。他的母亲来了,他的弟弟拉克希米·纳拉辛汗也来了。他们两人3月21日就到了孟买,但是他的妻子没有来。“为佳娜琪操什么心?”柯马拉塔马尔顶了回去。才一下船,拉马努金就坠入家庭纠纷的陷阱里去了。家里各种事情的纠纷已经破坏了他在英国最后3年的生活,现在他刚到家迎头又泼了一盆冷水。

其实,婆媳双方互不来往已超过一年了。谁也不知道佳娜琪在哪里,可能回到拉金德兰去了。或者,如果她知道拉马努金回家的话,就会到马德拉斯来,和她的姐妹住在一起。所以,叫拉克希米·纳拉辛汗写两封同样的信要她来马德拉斯接拉马努金。

事实上她回到拉金德兰去了。一年多以前就到那里去参加她兄弟的婚礼。她确实知道拉马努金的归来——只不过是从报纸上看到的,而不是她婆婆费心告诉她的。她的兄弟R·斯里尼瓦萨·耶恩伽尔劝她别回马德拉斯的家了。柯马拉塔马尔恨她,那又何必再自投虎爪之下呢?但这时拉克希米·纳拉辛汗的信来了,信上说拉马努金要她。佳娜琪期望的就是这句话,于是她和她的兄弟就出发了。

“当我回去以后,谁也不会让我参加葬礼了,”拉马努金在离开英国前这样告诉内维尔。这是他已准备好要忍受的耻辱之一。在一个严格正统的婆罗门看来,到英国去就得受到这样的耻辱。为了消除它,柯马拉塔马尔原来打算带拉马努金到拉梅斯沃勒姆一个大庙宇去举行净化仪式,他们全家在1901年曾去过这个庙宇朝拜。但是在孟买一看见拉马努金就打消了这个念头。去拉梅斯沃勒姆要向南走500英里(约800千米),再由马德拉斯乘火车,在火车上度过艰难的整整一天,几乎快到锡兰了。他病得太重了,所以停了几天后,拉马努金就和母亲、弟弟一起登上了孟买邮车乘夜班火车去马

德拉斯。

“当我接他下火车时，”拉马钱德拉·拉奥后来回忆起拉马努金于4月2日到达马德拉斯时说：“我就看到结局了。”拉马努金看起来怕人，更糟的是，佳娜琪仍然没有来。他问他的母亲为什么，这一次，柯马拉塔马尔说了一些关于佳娜琪的事，原来她去服侍自己病中的父亲了。

拉马努金被包起来送上一辆当地特有的两轮马车，立刻离开了喧闹的中央车站。5年前马德拉斯的送行者之一，曾由拉马努金辅导过数学的老朋友维斯瓦纳塔·萨斯特里，骑自行车跟在后面。离开车站向南走了大约3英里（约5千米），他们来到了爱德华·埃利奥兹路上一座很大的、四周有游廊的可爱的平房前。这房子本来是一位有钱律师的。当萨斯特里跟着来到这里时，拉马努金已经在吃酸奶和小扁豆汤了。“如果我在英国能吃到这个，”拉马努金说，“我就不会得病了。”

他尚未到马德拉斯前的周末，当地报纸就登了一篇由迪尤斯伯里办公室准备的关于他的生平的文章。弗朗西斯·斯普林爵士在一张办公用的便条上大笔一挥写道：“此文远不能满足公众对此人的兴趣。此种兴趣甚为合理，因此人之数学天才将为世界成就伟大业绩，且已有所成就。”他指示纳拉亚纳·耶尔查阅港务信托处关于拉马努金的档案，写一篇长些的生平记述。此文于4月6日发表，文中说：“拉马努金是马德拉斯邦坦焦耳区贡伯戈纳姆人，1888年[原文如此]生于一个贫苦家庭，其父母属于婆罗门之毗湿奴支系，就他们的英文程度而言，乃是文盲……”

拉马努金被任命为大学教授，他说，一待健康好转即去就任教职。马德拉斯当地名流简直是排了队去拜见这位正在康复的天才。这个以智慧征服南印度的英雄，现已告诉英国佬，

南印度人是何等的素质。他们蜂拥而来要为他付现在和明年的医疗和其他费用。他们群起把自己的房子让他住。《印度教徒报》的头头们都来了，当然还有拉马钱德拉·拉奥，还有弗朗西斯·斯普林爵士，还有纳拉亚纳·耶尔。

为了帮他挡一挡拜会者的驾，拉马努金的医生南君达·拉奥(Dr. M. C. Nanjunda Rao)要他搬到南面大约半英里(约800米)路的一个地方，叫做文卡达别墅(Venkata Vilas)，在路兹教堂路(Luz Church Road)上。这个路名是由附近一个葡萄牙教堂(当地人称为 Katta Kovil，意即丛林庙)而来。这里和他年轻时住的挤满人的特里普利卡内和乔治城不同，处于马德拉斯上层地区的中心，住的都是出身高贵的婆罗门知识分子、律师和学者。他们住在宽大的豪宅中，四周是种着椰子树和槟榔的花园。最后，就是在这里，佳娜琪和他的弟弟在4月6日见到了他。大约一周后，拉马努金的父亲、祖母和小弟弟也从贡伯戈纳姆来了。

那个月晚些时，即4月24日，拉马努金给迪尤斯伯里写了一封信，问起他在英国的费用和回国旅费，要求用自己的研究经费按月付。他还做了一个长期的安排。

拉马努金在路兹教堂路的那座平房里住了3个月。他和佳娜琪到这里才建立了某种实际的关系。当他离开时佳娜琪才13岁，现在她已18岁了。他们开始谈话了，而过去实际上没有过。也可能到现在才发现是柯马拉塔马尔截了他们之间的信，也许现在才有时间有肉体的亲密。

但是佳娜琪、她的家人和她的朋友们所见到的这个男人，和他们过去所认识的那个男人已经大变样了。当然有一些只是表面上的变化：现在他喝咖啡了，原来他不怎么喝的(尽管咖啡在南印度比茶还流行)，他的那一绺头发没有了，他的肤色白了一点，他瘦多了。佳娜琪见他如此憔悴而且咳嗽，这才

知道他病得有多重。

但是最让他的朋友苦恼的是他的性格变了。曾于1912年和他在马德拉斯住过一段时间的纳拉辛哈·耶恩伽尔，也来到火车站接他，后来说：“我发现他不再是那个欢乐的、友好的、重感情的拉马努金，而是一个情绪低沉的愁眉不展而阴冷的拉马努金。甚至看见我这个亲密的、感情很深的老朋友也是这样。”安南塔拉曼带了一串贡伯戈纳姆的香蕉来路兹看他，后来回忆说：“他已不是原来的拉马努金，他几乎不说话，他的病使他脾气暴躁。”他悲苦、急躁、乖戾，他的信仰也受了玷污。安南塔拉曼的哥哥加纳帕蒂(M. M. Ganapathy)有一次讲到神和庙宇的事，拉马努金马上顶回来说，“都是蠢话，那只是魔鬼。”

佳娜琪也免不了他的怒火，只要他的工作被打扰就对她大发脾气。他的护照照片就已经使人觉得他心事重重，而在第二年一年中，这种表情常掠过他的面孔。另一些记载说他对弟弟大叫，因为他浪费了钱或者因为在房子里乱丢东西，甚至有时气得去咬放在嘴里的温度计。

他家里对拉马努金一生事情的记录(可能是他弟弟拉克希米在他死后编的)中，关于第二年的事记载常常是模糊的。潦草的笔迹写了一些只言片语，如“泰米尔书”、“关于点的悖论”，还有“关于他发疯了的谣言”。其中记载着家人的往来，看房子、收到信件等琐事，许多事太简单今天已无法追忆。但有一件事在这一年中一再记录而毫无模糊之处：吵架。有时是婆媳吵，有时是媳妇和祖母吵，有时吵架双方是谁都没有记载。家庭记载4月吵了两次，7月吵了两次，8月又吵了一次，然后是9月，10月，以后还吵了几次。

这一年大部分时间，搬了几次家。家务事是怨恨沸腾的地狱人口。有一次，显然是为了拉马努金该不该进疗养院吵

闹，另一次是为了捐钱或什么别的事。拉马努金从柯林内特屋寄回的信件，建议把他的研究费用一部分作为奖学金也成了导火索。妈妈主张儿子多把好处留给自己家里人而不是别人。佳娜琪比起她的婆婆受钱的诱惑也不会少。多年后她还回想起拉马努金在临终时说“在他的储蓄中有五千卢比是给她买钻石耳环和金镯子的”。

马德拉斯的夏天快要来了，白天气温已超过 100°F（约 38℃）。拉马努金的医生建议他到内地躲过酷热与潮湿。一个可能是去哥印拜陀，这是一个位于山区的和贡伯戈纳姆差不多大小的城市。到那里去要一直向西穿过印度次大陆的南印度山脉。那里比较干燥，温度要低 10 度。但是拉马努金的母亲选择了戈杜穆地，那是一个沉睡的、只有几千居民的小城，但有一个著名的马吉德斯瓦拉庙，那里供奉的梵天、毗湿奴和湿婆特别灵验。戈杜穆地位于一个 200 英里（约 320 千米）宽的三角形的顶点，另两个顶点是纳马卡尔和埃罗德，后者是拉马努金的出生地。特别是，对于家族中拉马努金一方的人，回到了戈杜穆地就像是回到了家里。

包括戈杜穆地的那个地区，雨量只有马德拉斯的一半。到处都没有草木，一片枯黄。但这城市本身在高韦里河南岸，则是郁郁葱葱。河边多年来修建了一条无用的河堤，河面宽阔。北岸是一排棕榈树伸向远方，有异国风光。

虽然大学作了安排，拉马努金却住在东阿格拉哈拉姆街（East Agraaharam Street），离户籍员办公室很近。阿格拉哈拉姆意为婆罗门区。从阿格拉哈拉姆街与另一条街所成的丁字路口，沿另一条街走下去，就到了高韦里河边人们洗衣沐浴之处。这一次，在 1919 年 8 月 11 日，他们一家在参加一年一度更换圣巾的庆典仪式时，拉马努金与他的母亲大吵了起来。

两人之间的矛盾已酝酿了几周，在到达此城前就开始了。当时拉马努金要坐头等车，而他的母亲坚持坐二等车或三等车。现在，拉马努金要到河里沐浴，这是仪式的一部分，佳娜琪也要去，拉马努金说行，柯马拉塔马尔说不行。

而拉马努金坚持说就是行。

这是一个转折点，多年来积郁的敌意都掀出来了——那些被截的信，无尽的争吵——再加上现在这些事。他讲话很尊重但也很坚定：佳娜琪必须和他一起去。

这件事以后，佳娜琪在她丈夫生活中的地位高了一些，有她做伴，他比较自在一些。他不止一次对她说：“要是你和我一同去了英国，说不定我就不会害病了。”每星期五下午，他有时看她洗头擦油，在太阳下面把头发甩干。这种情形使他很快乐，有时甚至能叫他把工作放下来。在后几个月里，越来越多的都是由佳娜琪白天照顾他，给他服药；夜晚又护理他。有一次，他母亲要他叫佳娜琪打起行李回自己娘家去，拉马努金拒绝了。

拉马努金在戈杜穆地呆了两个月。每星期天，这个地区的医务官费恩赛德(C.F.Fearnside)医生来看他一次。可能一直到这个时候，柯马拉塔马尔回问了这位医生以后，才完全知道他的病情之重。有一次，费恩赛德建议拉马努金到哥印拜陀去；另一次建议他去贡帕戈纳姆附近的坦贾武尔(Thanjavur)。拉马努金不肯听，说：“他们叫我到‘痛杀吾耳’去（把地名用谐音说成泰米尔语的‘我死之地’）。”但是在夏天最热的时候过了以后，到一个不是太偏远的地方去，看来是越来越有必要了。

柯马拉塔马尔这次下了命令，非去贡伯戈纳姆不可。

8月末，她可能也想要避一避家里对她越发不利的形势，就先去找了一个房子，因为，萨兰伽帕尼·三尼第街上家里的房子显然不适合儿子养病，9月3日，拉马努金和家里其他人

离开了戈杜穆地，第二天的暮色之中回到了贡伯戈纳姆。

童年和少年时期的环境可能使拉马努金有点心醉，因为这个时期关于拉马努金的故事都比较轻松，甚至带有乡思的色彩。拉马努金一个老同学说起：“他坚持要去看我的姑母，而她已是一个 70 多岁的寡妇了，是他在 20 多年前念书的时候认识的。”老朋友也来走一走，巴拉克里希纳·耶尔，1910 年拉马努金为着一份工作还找过他，给他送来了一些干茄子片；帕协阿帕学院的同班同学拉达克里希纳·耶尔，曾在 1909 年他害病时看护过他的，回忆起拉马努金：“瘦成了一把骨头，躺在吊床上，拉马努金本来有一双有力的能看透人的眼睛，现在只偶尔一闪似乎还认识我。”他喃喃念着拉达克里希纳的名字。

现在拉马努金有了一位新医生，他是 P·S·钱德拉塞卡 (P.S. Chandrasekhar)，特地从马德拉斯请来看他的。哈代通过皇家学会与马德拉斯当局接触。医务局长专门去找了马德拉斯医学院一位 50 岁的卫生学和生理学教授，著名的结核病专家钱德拉塞卡。在约定的时间，钱德拉塞卡由拉马努金的一个老朋友萨兰伽帕尼(就是有一次在算术考试时超过了拉马努金的男孩)陪同，来到拉马努金在巴克塔普里街(Bhaktapuri Street)上养病的一座房子。钱德拉塞卡检查了一个多小时，确诊是结核病，虽然有血液中毒的想法。“我有一个老朋友比你们谁都更爱我，根本不肯离开我，”拉马努金后来告诉萨兰伽帕尼说：“这就是肺结核的发烧。”

当年早春拉马努金登上名古屋号回印度时，至少按哈代的估计，康复的希望还是很大的。但是那两年治疗他的这些疗养院都有一个根本问题：不能治疗结核。有一项研究表明，从那些英国疗养院出来的病人中，三分之一到三分之二活不过 5 年，大部分头两年就死了。钱德拉塞卡现在断定，拉马努

金已经病到晚期，他的生命系于上苍而非药石可以回天。

自从两年半以前病倒时起，拉马努金一直在受折磨。在英国，他看过很多医生，听到过无数相互矛盾的诊断，在许多医院和疗养所之间转来转去。现在回到印度情况仍然如此。他在马德拉斯住过两个地方，然后是戈杜穆地，然后是短期在哥印拜陀，再就是贡伯戈纳姆。一共只9个月，更多的医生，更多的检查，更多的诊断。尽管如此，他的情况一天比一天坏。现在，在贡伯戈纳姆，恶化更加速了。

正在1919年圣诞节前，迪尤斯伯里去信哈代讲拉马努金的账目细节时，加了一段：“他的健康情况依旧很糟，而且与家人一同住在乡下，很难办。拉马钱德拉·拉奥尽自己所能为他做事，但拉马努金不肯住在适当的地方做适当治疗，这是一大遗憾。”有一种说法，说他拒绝进一步治疗；另一种说法，说他干脆放弃了求生之念。要带他去马德拉斯，就像拔一颗牙齿那么难，而钱德拉塞卡医生要他去。这是一年中最凉爽宜人的时候，把他赶到戈杜穆地的酷热已经过去，白天温度只有华氏80多度(30℃上下)，拉马努金最后让步了。

大约才过了年初的某个时候，拉马努金、他母亲、妻子和内弟R·斯里尼瓦萨·耶恩伽尔，出发去马德拉斯——但是，暂时还只走到了火车站，他们误了车，下一班车还要等六七个半小时。他们没有叫拉马努金再乘车颠簸两英里路到巴克塔普里街，歇上几个小时再回来，而是在城边火车站上歇了下来。佳娜琪和柯马拉塔马尔轮流回到家里去取回来一点吃的东西或其他一时之需。

当然火车最后还是来了，他们也到了马德拉斯。1月15日迪尤斯伯里再次写信给哈代时说拉马努金的地址是：“库德西亚”，哈灵顿路，切特普特，马德拉斯(“Kudsia”，Harrington Road, Chetput, Madras)。

### 3. 最后的问题

拉马努金住进一座结实的，外涂拉毛水泥墙的房子里。那一批房子是世纪之交在城市西郊为英国人建造的。所以有一些西方地名如锡德纳姆(Sydenham)、拉文斯克罗夫特(Ravenscroft)和利斯摩依尔(Lismoyle)之类。有的还有网球场，那时网球在印度的中产阶级和公司职员中已很流行了。沿着一条垂直于哈灵顿路的巷子就有几十栋这样的房子。这条巷子现在称为十五路，但在拉马努金搬来时还没有名字。“库德西亚”就是这种房子之一，显然拉马努金在这里住得不久。有一段时间，他搬到这条满是灰尘的死巷子头上一座大得多的房子“克赖南特”(Crynant)去了。最后他又搬进了另一幢称为“戈美特拉”(Gometra)的房子。

正是在这样一座房子里，拉马努金于1920年1月12日给哈代写了一封信，这是在将近一年中的第一封信。

至今只写了一封信，我极为抱歉……最近我发现了一个极有意思的函数，我称之为“仿” $\theta$ 函数，它与“假” $\theta$ 函数(罗杰斯教授在他有趣的论文中部分地研究过它们)不同，其进入数学是非常漂亮的，像普通的 $\theta$ 函数一样。随信附上一些例子。

此信至今还引起数学家活跃的兴趣，其程度很像7年前大约同一天他写给哈代的信。有一种估计认为它是“数学中最有独创性的作品之一，在某些方面可以说是拉马努金最好的作品”。

正如许多其他使拉马努金有兴趣的东西一样， $\theta$ 函数可以写成无穷级数，只要您在构成一个级数时服从某些严格的规则，这些无穷级数总有一些使人感兴趣的性质。例如：它们

总是“拟双周期的”，它们又总是“整函数”。

但是， $\theta$  函数又是极精细的、很容易“弄坏”的。如果在构造这种函数时您稍稍偏离了它们的典范型，例如改变某几项的符号，那些使数学家们操心的性质就都不见了；乍一看它们与  $\theta$  函数没有什么差别，但是有趣的性质都没有了。自从雅可比研究过它以后，多年来  $\theta$  函数就深刻影响着从数学物理到数论的许多领域。关于它的专著一般都涵盖了广阔的领域，在许多看来并不相关的领域间建立起了联系。说实在的，拉马努金的智力伙伴罗杰斯在几年前的一篇论文中探讨过的“假  $\theta$  函数”就有一些趣味；例如：后来的研究将它们应用于分划问题。但比之数学家发现其有丰富含义的真的或者说“经典的” $\theta$  函数，“假” $\theta$  函数就大为逊色了。

现在拉马努金在给哈代的信中告诉他可以如何构造出一类新函数，它们不是  $\theta$  函数，但又有关键的相似之处，而且同样有趣。它们不是罗杰斯研究过的“假” $\theta$  函数，而是拉马努金所说的“仿” $\theta$  函数。

经典的  $\theta$  函数可以写成“欧拉式”变体，其中有  $(1 - q)$  或  $(1 - q^3)$  这样的项出现在分母上。这意味着例如  $q = 1$  或  $q^3 = 1$  时，这些函数在数学上是无定义的，而必须用另外的方法去探讨它们（大致类似拉马努金和哈代用他们的“圆法”来研究分划问题一样）。拉马努金以两个  $\theta$  函数为例，提出在这种“奇点”——即在需要特别研究的点——“我们知道函数的渐近形式可以多么漂亮地表示为简洁的闭指数形式。”

这些都是哈代熟悉的很艰深的基本工作。但是现在拉马努金跨出了一大步。

现在出现了一个很有趣的问题。关于[两个  $\theta$  函数]的命题之逆是否为真：即是说，没有一个具有欧拉式的函

数，并设所有的点或至少无穷多个点都是指数奇点，再设……

他就这样设下去，把他的函数展示在哈代眼前。如果满足了一堆这种特别的条件，他说，这一定是一个仿  $\theta$  函数。然后他就给出一大堆这种函数——4 个三阶仿  $\theta$  函数和 10 个五阶仿  $\theta$  函数，如此等等。

“这封信的前三页中拉马努金解释了什么是他所谓的仿  $\theta$  函数，写得很晦涩。”最早研究它们的数学家之一沃森承认如此。但是尽管很含糊，表述也很差，但它们包含了深刻数学真理。所以沃森在 16 年后以此为题作伦敦数学会的主席演讲，而且它还使其他数学家忙了好些年。沃森写道：

拉马努金之发现仿  $\theta$  函数使人看得很清楚，在他英年早逝之际他的技巧与独创性并未弃他而去。如同他早年的工作一样，仿  $\theta$  函数这一项成就已足以使他的美名永存人们的脑海之中。对于跟随他作研究的人来说，这些发现将永远是欢乐与惊奇之源泉。直到我们有一日也魂归冥府，\* 在那里

冥后站在拱顶的门口，  
面色苍白，头戴静谧的树叶皇冠，  
她把一切凡人聚拢，  
用她那冷冰的不朽的双手。

1893 年，福尔摩斯的创造者柯南道尔，写下了这位大侦探的最后一个探案故事，篇名是《最后的问题》\*\*，说这个名探与他的死敌莫里亚蒂教授搏斗，跌入瑞士\*\*\*的赖兴巴赫瀑布

\* 原文 Garden of Proserpine，即普罗塞尔皮娜的花园。普罗塞尔皮娜是罗马神话中的冥后。——译者

\*\* 福尔摩斯全集有多种译本，该篇标题也颇多精彩译法，此处索性直译为《最后的问题》，以期更符合本书背景。——译者

\*\*\* 此处原文误为奥地利 —— 译者

(Reichenbach Fall)身亡——至少是福尔摩斯的密友华生医生以为他确实死了。现在,40年过去了,数学家沃森<sup>\*</sup>教授,在讲到拉马努金在去世前一个月数学创造性仍然汹涌激荡时,又借用了柯南道尔的篇名——他说,仿θ函数就是拉马努金“最后的问题”。

在印度的这一年拉马努金都在研究仿θ函数,“q级数”及其相关领域,种种无穷级数等等,横来竖去地写满了一页又一页的定理和计算片段。有人统计有650个公式之多。当半个世纪以后,美国数学家安德鲁斯专门研究它们时,他为其内容之丰富以及使人感到的惊奇而慑服,对于一个人怎么会想到它们感到神秘。他说:“甚至对一个受过数学训练的人,若非专家,想把它们分辨清楚都很难。”在一组5个表面上很相似的公式中,他说:“证明第一个花了我15分钟,第二个用了1小时,第四个可以从第二个得出来,第三个和第五个化了我3个月。”

拉马努金在去世前一年做的工作,可以说应验了关于结核病文献中的老说法——回光返照。当一个结核病人快死时,会被驱向特别高的创造性的高峰;死亡的临近会使得创造性出现最终的灿烂,而在正常的生命中是不可能有的。现代的学者会马上举出一些艺术家和其他创造性的工作者来驳斥这个观念:那些人最伟大的工作都在得病前很久就完成了,而卧病临终时的产出为零。然而在拉马努金的时代,这个观念颇有人相信。关于拉马努金临终几天的许多记载中,至少有一个带有这个观念的气息,这就是塞舒·耶尔的记载。他写

\* 数学家沃森与华生医生同姓 Watson,原文在此有插入语 this other Watson (这另一个华生),但因两人的中译名均已约定俗成,故在此略去插入语,或有伤文采,尚祈读者见谅。——编辑注

道：“他没有一篇论文或研究，比这命定之日想出来的结果更有价值，更富直觉。他的体力无疑地在衰竭，但他的心智成反比地变得更锐利、更光辉。”

但是别的人，安德鲁斯是其中之一，对拉马努金的多产作了更平凡、而且无疑更合理的解释：“在他身后，有与哈代合作的充分的力量，又有他青年时期那种狂野的古怪的天才。换句话说，拉马努金应该达到他的力量的巅峰。”他在讲到拉马努金最后一年的创作时说：“这本笔记本就是证明。”

在冬末或 1920 年初春的某个时候，还住在“克赖南特”时，拉马努金就对他母亲抱怨说“克赖南特”这个名字不吉利，因为“克赖”的英文 *cry* 是哭泣之意。柯马拉塔马尔就去找这栋房子的主人（也是一条小铁路的主人）南贝努马尔·切蒂（Namberumal Chetty），他是弗朗西斯·斯普林爵士的朋友。柯马拉塔马尔这一次没说出拉马努金的真心话，而是说他的儿子需要一个更安静的去处。南贝努马尔让步了，而拉马努金沿着这条路搬到“戈美特拉”，其意有点像“牛奶的朋友”，这可以暗指克里希纳。

这是一座有许许多多门的房子。处处都有一排排的门，后门通向外面有拱顶的回廊，有通向里面天井的门，天井中有单独的做饭用的房子。逐个数下来，整个房子有好几十个门。如果把所有的门都打开，则房子的铺着花岗岩的地板就成了一个凉爽有荫的幽谷。不论哪个方向的微风都能穿过。您可以从街上某一个看来是侧门的门口进来，走过一道拱顶，就到了房子中央。那里有一个楼梯，扶手是缅甸柚木的，通到二楼。右侧，面向房子的正前方，有一个很大的起居室。拉马努金可以在这里稍事休息，然后就到楼梯另一侧朝着房子背面的角上的小房间去。

这座房子里家具很少，更增加了它的通透感。拉马努金的床就是在花岗岩地板上放一个床垫，上面一个枕头。他很少在枕头上挪动一下，躺在那里，他可以向上看见一根巨大的木梁，宛如脊梁那样跨过整个房间，支撑着二楼。这里离街比较远，所以比较安静。客人们走动的脚步都放轻了，怕打扰了他。蒂鲁纳拉亚南亲切地回想起哥哥和他一同骑马，和他讲故事，把他扛在肩上，现在却发现想要接近他都有人小心地守着，谁也不许去麻烦他。

然而，拉马努金不可能完全感受不到家里的紧张关系。全家都处在一种对立的紧张氛围之中。而他又病了，十分可怜，易怒，这当然不会使事情好转。婆媳俩一再吵架，不把精力用在照顾拉马努金上。此外，现在和过去不同，对抗的双方不是那么不平等了。佳娜琪已经 20 岁了。在家务事上处于一种新的、更有力的地位，何况还有自己的兄弟 R·斯里尼瓦萨·耶恩伽尔站在自己这一边。

3 月左右，柯马拉塔马尔来找数学家塞舒·耶尔以前的学生、拉马努金的老朋友和拥护者纳拉亚纳斯瓦米·耶尔 (G.V. Narayanaswamy Iyer)。她把他为拉马努金写的推荐信带在自己身上。他现在是特里普利卡内的一个中学教师。但是柯马拉塔马尔上门并不是因为他会教书，而是因为他又是一个著名的占星专家。

纳拉亚纳斯瓦米·耶尔向她要了一份她想要算命的人的天宫图。她靠自己的记忆告诉了他。推算了一会儿以后他说，此人的命运要么是一个有世界名声的人，但是可能在声名极盛时去世，要么可以长寿，但是默默无闻。“这位先生是谁？叫什么名字？”他问道。

这当然是拉马努金。柯马拉塔马尔哭着回答，说自己推算他的天宫图也是这个结论。

拉马努金！纳拉亚纳斯瓦米·耶尔试图多少有所挽回。“我很抱歉，我太性急了，”他说，“请不要把我讲的告诉他的亲戚。”

“我就是拉马努金的母亲。”她答道。

纳拉亚纳斯瓦米·耶尔想从这个尴尬局面下找一条出路，就建议可能他的妻子的天宫图可以缓和一下这个坏消息。“您下一次能把她的天宫图也带来吗？”他问道。再来一次大可不必了，柯马拉塔马尔流利地背了出来。

占星家想找出一点东西——什么都行——以期引起希望。当他把两张天宫图并排在一起，推算了半个小时，一无所获，只好建议夫妇两人分开一段时间可能有好处。

这可正中下怀。“我曾请求……我的儿子送她回家去，”她说，“但是，天啊！他坚决拒绝了。他本来是一个听话的儿子。但是这件事他的固执是不可克服的。”

拉马努金知道他时日不多了吗？关于结核病还有一个长期存在的神话，即病人是最后一个知道死亡降临的人。“由于回光返照，有一种将会康复的一线希望，”一位研究结核病的学者麦克默里(Nan Marie McMurry)详细叙述道，“人们以为结核病人到临终之时还有望恢复健康。”

但是拉马努金并未受到这种幻觉之苦。在他最后几个月里，他常对医生说已无求生之愿望。确实，他早先说过，当他康复后希望大学给他一个教职。今年1月，当他写信给哈代讲他的仿 $\theta$ 函数时，他还表示有意订几份数学杂志。但是他的蒙昧迷信却使他看到事物晦暗的一面，而且碰巧看得比较准确。他早就看过自己的天宫图，预计自己活不到35岁，而搬到哈灵顿路后，他又说，此处所在的马德拉斯郊区切特普特(Chetput)的泰米尔语谐音“查特帕特”(Chat-pat)意思就是“时

刻快到了”。

最后几个月里,拉马努金对佳娜琪更亲近了,只要他没有发脾气,他们之间的关系也更温暖更随便。“他一直对我很好,”佳娜琪回忆道,他的聊天充满了机智和幽默,总在说笑话。好像是为了使她更高兴,他总是对她讲英国的事——他怎样去大英博物馆参观,在那里看见些什么动物,讲他在剑桥时有一位英国客人吃他做的南印度菜时,硬嚼下了一块辣椒……

他的生活从数学的高峰稍稍降下来一点回到人间日常小事。他叫佳娜琪时就摇一下一个小铃铛,或者用一根小棍子敲一敲。他告诉拉马钱德拉·拉奥的女婿拉马·拉奥·萨希布(C.S. Rama Rao Sahib),他多么想吃 *rasam* 汤——将近 10 年前的 1910 年他住在维多利亚宿舍的穷困日子里吃过的,那时每当有人给他送来 *rasam* 汤时,他是多么高兴。

尽管如此,他的死还是痛苦的。有些朋友后来总是这样回想——不论他多么努力使自己愉悦而且泰然处之,也如一张薄纸难以掩盖他的阴沉绝望。大多时间里他总是忧郁愤怒。他的脾气反复无常,尽是细微小事。佳娜琪后来觉得——在英国的哈代和他在印度的许多朋友也有同感——疾病影响了他的心灵。他不是看不惯这就是看不惯那。他身边有一个盘子,放着土豆,香料和米饭,有一次,在一阵痛苦和愤怒之下,他用棍子把这些都打成一团。纳拉辛哈·耶恩伽尔,曾因到马德拉斯中央车站去接他时,受到他冷淡和阴暗态度的伤害,现在又到哈灵顿路来看他。“我非常伤心,看见他虽然肉体上还活着,内心已离开了这个人世,甚至离开了他一度亲密的朋友。”

很快就会了结,佳娜琪后来回忆道:“他也只剩下皮包骨头”,他叫痛令人害怕,胃痛,腿痛,痛得厉害时,佳娜琪就用一

个铜盆装了热水，用热手巾敷在他的腿和胸口上，这称为“热敷”，是当时流行的疗法。但是，在疼痛发烧中，在无穷尽的家务纠纷中，在他自己已不能泰然处之时，拉马努金躺在床上，头支在枕头上，还在工作。当他要的时候，佳娜琪就给他一个石板，然后再把这些结果写在纸上，佳娜琪就把这些写满了数字的纸收集起来，放在他从英国带回来的大皮箱中。佳娜琪后来说：“他和哪一个来看他的人都不讲话，总是数学……直到死前4天还在涂涂画画。”

1920年4月16日晨，拉马努金陷入昏迷，整整2个小时。佳娜琪坐在他身边，喂他冲淡的牛奶。到上午将半或稍早一点，他去世了，享年33岁。在他身边有他的妻子、父母、两个弟弟和几个朋友。

当天稍晚举行了葬礼，他的正统的婆罗门亲戚都没有来，因为拉马努金曾经飘洋过海，回来后又因病体难支没有到拉梅斯沃勒姆进行他母亲计划的净化仪式，所以在他们看来，拉马努金是受了玷污的。拉马钱德拉·拉奥叫他的女婿，也是拉马努金小时候的朋友拉贾戈帕拉查里安排了火葬。下午1时，他枯槁的躯体于切特普特附近的火葬场火化。

第二天，一位政府书记正式记载了他的死亡，登记证228号。

#### 4. 印 度 之 子

天体物理学家苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡(Subrahmanyan Chandrasekhar)是在当时属北印度的拉合尔(Lahore)长大的。他8岁时迁居马德拉斯，进了当地的王公学院，后来又去了剑桥三一学院(在那里见到了哈代)。他在理论上证实了有黑洞存在，而于1983年获诺贝尔奖。1920年，他才9岁，他还清楚

地记得当年4月末的一天，母亲在报纸上读到拉马努金去世，并且告诉了他，“虽然那时我全不知道数学家拉马努金是什么人，说真的，根本不知科学成果为何物。”大约70年后，钱德拉塞卡对一批美国听众说：

我仍记得当我得知处境和我类似的人肯定也可以取得成就时，心情是多么高兴，尽管我并不能把握这些成就是什么。

拉马努金早年生活在一个科学贫瘠的氛围中，他在印度生活远非顺利，在绝大多数印度人看来，他的经历的确有不少奇迹：他到了剑桥，得到了著名数学家的支持，回到印度时完全有把握成为本世纪最具有独创性的数学家之一。所有这些事实，足够而且远远足够鼓舞印度青年学生去打破心智上的囚禁，说不定有朝一日像拉马努金一样高高飞翔。

在另一次演讲中他说到：“在20世纪20年代的印度，我们为一些人骄傲，他们是甘地、尼赫鲁、泰戈尔(Rabindranath Tagore)，还有拉马努金。我们骄傲的是，世界上能做到的我们都能做到。”当然在印度数学中，拉马努金的影响相应地要深一些。“我想这样说是公正的。”钱德拉塞卡看到这一点，“在拉马努金以后的三四十年里，凡有成就的印度数学家，都直接或间接地受到过他的榜样的鼓舞。”[马德拉斯王公学院数学专业有一个很聪明的青年学生维杰亚拉伽凡(T. Vijayaraghavan)刻意模仿拉马努金，故意不好好读书，考试故意不及格。]

这就是在拉马努金死后的年代中对印度的影响。但是他的家族却要为斗米生计操心，痛苦的回忆充满了艰难的最后几年，他的死给他的家留下的“尾流”要小得多，然而仍可尖锐地感觉到。

20世纪30年代，当拉马努金的一位朋友问在最后几个月治疗拉马努金结核病的钱德拉塞卡医生，当时有没有可能

挽救他的生命时，医生回答道：当然可以。朋友的问题引起了他的狂怒，拉马努金是可以救的，是应该得救的，应该谴责的是他的母亲和妻子，她们至少有部分的责任。拉马努金去世次日，医生在日记中写道：

如果让他听我的嘱咐，这个双倍的悲剧本不会发生，早期就疏于治疗——可能部分是因为他的同代人的无知，也是由于他的（他母亲和妻子的）亲戚造成意外的疏忽（我几乎要用“犯罪”两字），造成了这个双倍的悲剧——如此沉痛，我欲哭无泪。

钱德拉塞卡医生（他失去了自己最杰出的病人，可能因此而特别愤怒）把婆媳两人刻画为深陷于物质利益泥沼之中。但是不论在拉马努金生前或是身后，她们均不处于一种可以不为生计所迫的地位。拉马努金回印度后，不管怎么说总有大量的研究经费，是给她们饭吃的人。现在他去了，于是，对于可以争夺的东西必然有一场好吵。

4月29日，拉马努金尸骨未寒，他的18岁的弟弟拉克希米·纳拉辛汗就写信给哈代报丧（哈代无疑已经听说了）。拉克希米·纳拉辛汗使用只适合于发战斗专电的语言抱怨说拉马努金的书和论文“全由其妻控制”。他说，“听拉马钱德拉·拉奥的女婿说，政府将每月给佳娜琪一点津贴，对我全家未做类似的安排，甚为遗憾”够清楚了，佳娜琪不算他们家的人。

这是一个凄惨的恳求，提醒我们当初拉马努金想研究数学而不是给自己找一个好工作时，曾受到很大的压力。拉克希米·纳拉辛汗说，在他去英国后不久，他的父亲已经瞎了。他的祖母是跛子。现在全家人的命运就落在这个年轻人肩上了。他说：“此外，我还有一个臃肿的母亲，体形极像我的哥哥。”至于他自己，为了帮助他的哥哥，中断为自己打算已经有好些年了。

我没有叔伯或是堂兄弟保护，我们没有财产，这一点您可能很清楚。我很想去读书，我希望能“遗弃了债务，在幽居生活中修养我的德性”。\* 我很抱歉，我对数学并无兴趣，我爱读莎士比亚、华兹华斯、丁尼生。愿在此仙境中“半飞半走”。我不知道怎样才能养活我的家人。因此，我谦恭地请求您写信给马德拉斯大学，让他们每月给我一点补助，我听说我哥哥可以从剑桥大学得到一笔钱。

总之，我是一个年轻人，生计维艰，我不知道怎样保护他们，若无支持只好沿门乞讨。我谨将此托付给您，您应保护我们而责无旁贷。

没有理由相信哈代会做任何这类的事。这个家族又漂流到某种微贱的生活之中。本来，若非有拉马努金出生这样的偶然事件，这该是他们自然注定的命运。

拉马努金死后几个月，他的 65 岁的父亲也病了，并被送到纳拉亚纳·耶尔在派克罗夫特路上的房子里。柯马拉塔马尔和纳拉亚纳·耶尔的妻子照顾他，直到 11 月他去世。他就死在拉马努金和纳拉亚纳·耶尔儿时在一起做算术时常做到深夜的那间房里。

而柯马拉塔马尔一直没有从儿子去世的打击中恢复过来。“她不再像过去那样乐观，时常愁眉不展，”这个家族的一位老朋友，现在是一个学院的教授拉加万(K. Srinivasan Raghavan)这样说。柯马拉塔马尔 7 年来从未给哈代写过信，现在写信给他。她请一位书记或者家族的一位朋友帮助把泰米尔文译成流利的英文。她在信中报告说，她的儿子拉克希米·纳拉辛汗已通过了中级考试(这是拉马努金从未通过的 F.A. 考试的新名字)，现在在特里普利卡内邮局工作，另一个儿子蒂

\* 出自莎士比亚《暴风雨》第一幕。译文采用人民文学出版社 1978 年版《莎士比亚全集》第一卷第 11 页。——译者

鲁纳拉亚南现在在上王公学院，今年早些时已得了文学士学位。

这封 3 页长的信其余大部分都是在诉说家境的不济，列举了她所能得到的微薄的救济，重新陈述了她的难处。“1914 年我把儿子送到英国，心想我那与贫困结下不解之缘的家庭会由此变得富裕，我的儿子也会成名。他如同阿喀琉斯<sup>\*</sup>一样得到了永存的名声；他也像阿喀琉斯一样英年早逝。”于是，她请哈代以她儿子的名义向政府以及伦敦的印度文职人员求情。她要求让她的儿子们在邮政部门中得到高位。教育程度较高的蒂鲁纳拉亚南担任试用督察长，拉克希米·纳拉辛汗任马德拉斯邮政局稽查员。不知哈代有没有去求情，蒂鲁纳拉亚南后来确实当了助理邮政局长。比较华而不实的拉克希米·纳拉辛汗年纪很轻就死了。

安南塔拉曼是他们家的老朋友，拉马努金小时候常在他家吃饭。当他叔父告诉他拉马努金的死讯时，他正因腿部手术卧床休养。这对他是一个很大的打击。在 20 世纪 30 年代末，柯马拉塔马尔曾去特里普利卡内看望他和他一家。“看望我们也是安慰她自己，她还说感到看见了她的儿子‘小王子’。”

这时佳娜琪与她们分手了。拉马努金曾经担心，自己死后她将受到家里人怎样的对待。她现在是一个 20 岁的寡妇，而在印度，寡妇实际上是受压迫的阶层，通常容易受到虐待和蔑视。她没有受过教育，没有一技之长，她的兄弟和母亲在拉马努金去世前两天来到切特普特，预计到她得不到柯马拉塔马尔和她家人的帮助。

\* 阿喀琉斯(Achilles)，希腊神话人物、特洛伊战争中最伟大的战士，死在特洛伊。——译者

所以在火化后，她随母亲回到了拉金德兰。以后6年中和她的兄弟住在一起，这位兄弟现在是孟买的一个所得税官员。当她得知马德拉斯大学愿意每个月救济她20卢比，交换她对拉马努金遗稿的权利，她就回到马德拉斯，和她的姐妹在特里普利卡内住了一段短时间。很快，她就找到了自己的住处——汉奴曼塔拉扬(Hanumantharayan)街上的一座房子，离她和拉马努金去英国前住的房子只隔两个门。后半个世纪大部分时间她都是在这里度过的。

在孟买时她学会了刺绣和踩缝纫机，现在她做衣服和教女孩子裁缝勉强糊口。1937年，天体物理学家钱德拉塞卡受哈代之托，在下一次回印度时去找一张拉马努金的好照片，追寻她一直到了特里普利卡内。钱德拉塞卡回电报说她“生计维艰，她的那些肆无忌惮的亲戚，已经把拉马努金留给她的一点经济来源骗光了”，甚至连几年前出版的她丈夫的《论文集》(Collected papers)她手上也没有一本。

在1948年前后，佳娜琪开始照顾一个男孩纳拉亚南，当时这孩子的母亲住在医院里，孩子本人却得了伤寒。她到医院去看他，抚养他，给他带来上学用的书。后来这孩子的双亲去世了，就去和她住在一起。当她作为一个缝纫女工无力既抚养孩子又养活自己时，他还短期上过一个寄宿学校。但他15岁时又回来和她长期同住，她也就收他为养子。

《印度数学会杂志》原定1919年12月出版的一期脱期甚久，当拉马努金于1920年4月去世时，编者就在这一期中夹进一张带黑边的橄榄绿色的条子，其上印着：

#### S·拉马努金先生故世

本刊沉痛宣告，拉马努金先生 B. A., F. R. S. 已于  
1920年4月26日星期日不幸在其马德拉斯切特普特寓

所内逝世。其生平与研究工作将在本刊下期发表。

7个月后，该刊登载了两篇悼文。其一由塞舒·耶尔撰写，主要是提供事实与编年；可能是拉克西米·纳拉辛汗应他之请收集了拉马努金生平之家庭记录。另一篇是拉马钱德拉·拉奥写的，转载自其他杂志，而且较有文采。“他已经不在人间，”文章这样开头——

他的英名将在全印度生辉，他的际遇将被认为是对现存的奇特的[原文如此]教育制度最严厉的谴责：若有谁忘记了印度的过去，敢于怀疑她在智慧上的能力，即可诉求于他的英名。

关于拉马努金的一生，不断有种种说法吸引人们，而且触动了印度人的敏感之处。有些人，例如哈代，认为他早年在学校中的失败是：“一种无效率的僵化的教育制度可以造成何种损害，这是我所知道的最坏的例证。”另一些英国人则把它看成电影题材：一个衣着褴褛的人终于成了极富智慧的学者的故事。但对许多印度人来说，正是在褴褛衣衫后面的智慧所发出的光辉使人慑服，对于人世的浅薄的颂扬，他似乎不屑一顾。“甚至当两个大陆都在发表他的成果时，”拉马钱德拉·拉奥写道：

他仍是那个带孩子气的人。全不顾衣着的式样，其神态也毫不掩饰，总是那一副仁慈的面孔，同样地质朴无华。朝拜者来到他的居室而怀疑难道这就是拉马努金……如果要用一个词儿来概括拉马努金其人，我愿用：印度性。

甚至在他死前，他也被看成对于正在凸现的印度本性的贡献。《印度数学杂志》说：“他用自己独特的数学才能与[他所完成的]有用而且独创的工作，在外部世界的心目中提高了印度。”天体物理学家钱德拉塞卡则看得更为准确，“拉马努金代表了偏离常规之极端。所以他之出生于印度必须在很大程度上看作是一个偶然事件”。印度可以为其国人中的许多人

而骄傲，这些人成就于西方，或者成就于整个世界大舞台上。然而至少在她的科学家中，几乎没有人比拉马努金更加只是“印度的”。

印度不是一个贫困得不成样子，人们仅为生存的物质需要而不息斗争的国度吗？以至于尽管拉马努金并不愿意，而且只想为研究而研究，也不得不参加这个斗争。

印度本质上是东方的，她与西方截然分开并独立于西方吗？拉马努金在离家乡一日火车路程的范围之内，度过他的成长年代，并完成了绝大部分孤立独行的工作。他曾度过一段几乎未受西方魅力引诱的生活，也未曾有过要离开印度的特殊愿望。而当时机到来，他确实到了英国时，他对于自己变成一个英国绅士却是很不情愿的。

没有背弃印度教的神，他求助于女神娜玛吉利的名字。他深深地沉溺于而且接受了南印度绝大部分价值观、信仰与生活方式。

印度心理学家阿西斯·南蒂在《另一种科学》(Alternative Sciences)一书中把拉马努金与印度物理学家和植物生理学家J·C·博斯(J.C.Bose)\*相比较说：博斯总是为自己内心中东方与西方的冲突而苦恼，拉马努金则不，他比较有独立意志。“[博斯]在他的民族主义中，正如同在他的西方现代化中一样，远远更深入地与西方密切联系，既羡慕它，又恨它。”拉马努金则不同，他就是他那样一个人，——彻里彻外是一个南印度婆罗门。与许多其他印度人不同，拉马努金的思想倾向西方习俗的程度要小得多。

拉马努金活在印度的灵魂里。这不是他的表白，而是由他的生活方式和成就证明了的。“英国人总以为印度人低人

\* 博斯(1858~1937)，印度植物生理学家、物理学家。——译者

一等,而拉马努金证明了不是这样。他振作了我们的士气。”马德拉斯的数学教师 P·K·斯里尼瓦散(P. K. Srinivasan)这样说。他编过一本关于拉马努金的回忆录。E·H·内维尔的观点则是:拉马努金取胜的那个特殊的运动场——极其纯粹的数学——扩大了他的影响。1914年内维尔写过一个广播稿。他的讲话播出了,但不知是由于时间限制还是政治原因,他并没有把准备好的都讲完。在没有播出的一部分评论中,有如下一段:

正因为拉马努金是一个数学家,对印度与英国关系的发展有独特的重要性。印度产生过大科学家,但是博斯和拉曼(Raman)<sup>1</sup>都是在印度以外受到的教育,谁也说不明白他们的灵感有多少来自他们成长时期在其中度过的伟大实验室,有多少来自教过他们的那些名人。印度也产生过大诗人和大哲学家,但是异国文献对他们的表扬中,总有一种微妙的施恩色彩。只有数学的标准是无懈可击的,所以在所有的印度人中,拉马努金是第一个为英国人所知的,天生就与英国最伟大的人物等量齐观的人。有一种在西方世界中极为流行的假说,即白人先天地优于黑人<sup>2</sup>,这个十分伤人的假设虽然经过无数人道主义的争论与政治上的诉求,却仍然留存下来,毒化了英国与印度的无数合作通道。正是经由斯里尼瓦萨·拉马努金之手对这个假设给出了致命的一击。

在伦敦数学会 1920 年 6 月 10 日的一次会上,按照会议记录,“主席提到拉马努金先生之去世带来的损失,麦克马洪少校就拉马努金的数学工作发言”。

哈代在不久前才得到关于仿  $\theta$  函数的信,似乎拉马努金

\* 拉曼(Sir Chandrasekhara Venkata Raman, 1888 - 1970), 印度物理学家, 1930 年获诺贝尔物理学奖。——译者

\*\* 原文如此,但实际上印度人并非黑人。——译者

处于上升时期，在听到拉马努金的死讯时极为震动。他为《自然》杂志写了一篇短短的讣文，几个月后内维尔又加上一些信息，然后又为《伦敦数学会会刊》写了一篇长得多的文章。

在美国，《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly)把通常对外国杂志上发表的论文做枯燥论述的栏目也扩大了，讲述发现拉马努金的传奇故事，甚至讲到他的形象：“在谈话时总是生动活泼，用他的细细的手指做手势。”

拉马努金的遗稿不知怎么到了马德拉斯大学手上；佳娜琪后来在葬礼上鼓励塞舒·耶尔把它们带走。几年后，在1923年8月30日，迪尤斯伯里把除原来的笔记本以外的一切全都交给哈代了。

1921年，哈代发表了拉马努金的最后一篇论文。同年起，他开始在自己的论文中继续拉马努金的工作。1922年，莫德尔发表“关于拉马努金、达林和罗杰斯考虑的某些模关系的注记”。第二年，威尔逊的“拉马努金宣布的某些公式的证明”一文发表在《伦敦数学会会刊》上。

拉马努金去世不久，哈代就致信迪尤斯伯里：“马德拉斯可否考虑将论文成集出版？对如此杰出的天才，应有某种永久的纪念，而这种纪念，论文集肯定是最适宜的形式。”经过很长时间的通信来往，剑桥大学出版社终于在1927年出版了拉马努金的《论文集》，在355页的篇幅中几乎包括了他所发表过的一切。早年在印度的工作也在其中。同样也有关于划分函数和高合数的论文，甚至他为《印度数学会杂志》读者们提出的问题以及他写给哈代的那些信的数学部分也在内。

随着论文集的出版，更广大的数学领域也注意到拉马努金的工作了，有如洪水闸门打开了。在几年之内，论文一篇接着一篇，总数有好几十篇，标题都是如“拉马努金的两个论断”，“关于拉马努金的一个问题的注记”，还有“关于拉马努金

的算术函数  $\tau(n)$  的一个注记”之类。1928 年,哈代把拉马努金的笔记本和其他文稿,信件和论文都交给沃森,后者则和威尔逊开始了一项数学冒险——编辑这些笔记本。这件事耗费了沃森的精力,直到第二次世界大战前夕,结果是发表了 20 多篇大文章。

就数学界而言,拉马努金还活着。

“在我们这一代人中,再没有比拉马努金在数学乐园中驰骋更浪漫的性格了。”美国数论专家卡迈克尔(Robert Carmichael)在 1932 年写道,“真的,在人类历史中,在人的智慧探求的一切领域中,几乎没有什么人能如拉马努金那样更有力地吸引我们的兴趣,或者更完全地激起对他们的天才以及在逆境中获得成就的特殊景仰心情了。”

莫德尔以一种类似的感情写道:“在过去几代数学家中几乎没有什么人如此充满人性的趣味。他一生的故事就是一个默默无闻的印度人,面对着最大的困难,上升为印度从未产生过的最著名的数学家。而当他得到了令人羡慕的殊荣时,却又英年早逝。”

如果说拉马努金的生平已使数学家特别入迷,那么,他的研究工作就更是如此了。1931 年,匈牙利布达佩斯大学一位 18 岁的数学神童埃尔德什(Paul Erdős)写了一篇关于素数的论文。老师建议他读一下拉马努金《论文集》中类似的证明,“我马上就以极大的兴趣读了它”。<sup>\*</sup>第二年,他又读到哈代与拉马努金合写的一篇关于一个整数的素数因子个数的论文。

这里简单回溯一下这个问题。有些整数比其他整数的复合程度更高,这个问题是拉马努金在关于高合数的论文中探

\* 见《数字情种——埃尔德什传》,保罗·霍夫曼著,米绪军等译,上海科技教育出版社,2000 年,70 页。——译者

讨过的。一个数,例如  $12 = 2 \times 2 \times 3$  有三个素数因子;  $14 = 2 \times 7$  有两个素数因子;  $15$  也有 2 个;  $12$  的素数因子个数多于  $14$  和  $15$  这两个数的素数因子个数。而  $16$  则有 4 个素数因子。当您逐个检验整数时,其素数因子个数的变化是很可观的。哈代和拉马努金说,我们不必去检验素数因子的个数是怎样变化的,而去找它的平均值——就如同您不能预测下一次掷骰子会出现什么花色,但是您可以预测某一种特定的骰子搭配方式出现的频繁程度。粗略地说,他们的结果就是:绝大多数整数大约有  $\log \log(n)$  个素数因子:取一个  $n$ ,取其对数  $\log n$ ,再取这对数的对数,就会得到一个粗略的估计。 $n$  越大这个估计就越有改进。这个结果虽然粗糙,却超过以前任何人所做的,为了证明它,用了整整 23 页很细密的数学推理。

后来哈代告诉埃尔德什,几乎 20 年,他们的定理似乎死了,要改进它而无丝毫进展。然而,到了 1939 年,这个问题又复活了,埃尔德什和卡茨得到一个定理把它大大推前了。直到那时,数学家们才回溯往事,宣布 1917 年哈代—拉马努金的文章是现在称为概率数论的这一领域的开山之作。

在挪威,1934 年,塞尔伯格(后来成了世界上最著名的数论专家)还是一个中学生时,在一份挪威数学杂志上看到一篇关于拉马努金的文章。文中说拉马努金是“一个了不起的数学天才”。多年后,塞尔伯格告诉马德拉斯的听众,最适合译成英文 remarkable(了不起)的那个挪威词还有一层含义,即“非同寻常而且有点奇特”。

塞尔伯格说他读到的这篇文章以及其中包含的某些结果:“给我留下长存的深刻印象……使我非常入迷。”塞尔伯格还有一个兄弟,也喜欢以数学自娱,带回家一本拉马努金的《论文集》。对于塞尔伯格,这本书“是一个启示,对于我是一

个全新的世界,与我所见到过的数学书很不一样,它更能激起我的想像力”。多年以来,这本书一直保持着其激动人心以及神秘的气息。“它真的给了我一个推动力,使我开始了自己的数学工作。”

后来他的父亲也送给他一本拉马努金的《论文集》作为礼物。他告诉孟买的听众,这本书他一直带在身边。

在英国,1942年,戴森(Freeman Dyson)当时是哈代的母校温切斯特学校二年级的学生,得到学校的数学奖,选了一本哈代和赖特合写的数论书。多年以后他回忆道“哈代和赖特的这本书中我最喜欢的一章就是题为‘分划’的第19章”。其中特别写了拉马努金所发现的分划函数的同余性质。戴森深深地卷了进去,而且思索这种同余性质可能意味着什么,想出了“秩”的概念,他所定义的分划的秩,就是一个分划中最大的数与该分划中所含的项数之差。例如9的一个分划是

$$9 = 6 + 2 + 1$$

其秩是3——即该分划中的最大数6减去该分划中的项数3之差。戴森想,拉马努金的同余性质就蕴含了某些分划可以以“秩”为基础干净地分成大小相同的类。

“这就是拉马努金的奇异之处,”他后来说,“他发现了那么多,然而在自己的花园里又留下那么多东西等别人去发现。那个令人高兴的日子已过去44年了,我仍然时而回到拉马努金的花园。每回去一次,我总会找到新绽开的花朵。”

两年后,戴森在英国皇家空军轰炸机司令部工作,成为统计学家,密切注视盟军在德国上空的损失,这是盟军的宣传所不能否认的。后来他写道:“那是一个漫长、艰难而冷酷的冬天。”晚上,他和另一位数学家通信讨论拉马努金首先提出的思想。“在寒冷的夜晚,我在1944年的死亡与毁灭中涂画那

些美丽的恒等式。这时我感觉我与拉马努金更接近了,他也曾在 1917 年的死亡与毁灭中涂画更美丽的恒等式。”<sup>4</sup>

所以,拉马努金多年来并未为人遗忘。1940 年,有人统计出自他死后有 105 篇论文讨论他的研究工作。在 20 世纪 50 年代末,纽曼(Morris Newman)在博尔德的科罗拉多大学数论研究所的一次会议上发表了一篇论文,他是这样开头的:“和解析数论中的许多东西一样,分划函数同余性质的研究来自拉马努金”,并以他的早期论文为起点。肯定地说,到 1987 年,在他诞生 100 周年时,他的名声是确定了。

伊夫斯(Howard Eves)在他的《数学史引论》(*Introduction to the History of Mathematics*)中编了一个提纲,列举历年来数学上的重大事件。例如 1906 年,列出弗雷歇(Fréchet)的工作,1907 年则是布劳威尔(Brouwer)。再往后,按伊夫斯的估计,出现了很长的干旱时期,长达 9 年之久,一无所有。直到 1916 年,干旱时期才由爱因斯坦广义相对论之出现而结束。然后,1917 年伊夫斯列出了下面这条:

#### 哈代与拉马努金(解析数论)

然而在 20 世纪中期,一种悲哀与未完成使命的感觉总是与拉马努金的名字联系在一起,为他未能取得更大成就而遗憾。哈代自己定下了这个调子,指的是拉马努金在数学的沙漠上住了这么多年。“如果在他年轻时就把他捉住,培训一下,他可能成为一个更伟大的数学家,”他这样写道,“他可能会发现更多新的、而且无疑更加重要的东西。”李特尔伍德在 1927 年为他的《论文集》写评论时,也回应了这个调子:“如果

<sup>4</sup> 此事详情请参考戴森著《宇宙波澜》第三章,邱显正译,三联书店,1998 年。——译者

他是活在 100 年或 150 年前，拉马努金将会是一个多么伟大的数学家？如果他能够在适当的时机与欧拉接触又会怎样？”

当然，他没有，这是一个遗憾，但是事实就是事实。

好多年来，他的工作湮没了，与拉马努金探讨的领域相距极远的新数学领域成了时尚。他的《论文集》尽管有追逐者，却非畅销书，甚至按学术专著的标准来说也不算畅销书。第一年只卖了 42 本，第二年 209 本，而剑桥大学出版社一位职员在 1929 年末写信给哈代说，第一版 750 册要 10 年才能卖完。戴森后来回忆道：“当我在[第二次世界大战后]到美国时，我完全是一个出于自愿专心于此的人。”对于当时的数学前沿而言，拉马努金的工作只不过是“一潭死水”，是 19 世纪的一点痕迹。

但是，时机一到，这些都会改变。

## 5. 拉马努金的重生

一个里程碑出现在 20 世纪 50 年代后期。当时拉马塞山 (S. Ramaseshan, 他的父亲认识拉马努金) 到孟买去看一个办印刷厂的朋友，这位朋友把他带到里屋，在那里

我大吃一惊看到一叠发黄的旧纸上画着许多幻方，还有系统地用漂亮的笔迹书写的数学公式。我不敢相信，原来我面前的就是拉马努金的笔记本，我在 1937 年就听父亲说过，这就是拉马钱德拉·拉奥所说的“磨坏了的笔记本”。我用指尖在这些旧纸上轻轻划过，为的是要触摸一下拉马努金在他还没有找到工作，生活无着时，脸上带着笑容写满了的那些纸。

于是，他朋友开的商务印刷出版社“得到了一项从未得到过的最令人兴奋的工作”。1957 年，由塔塔基金会 (Sir Dorabji

Tata Trust)资助,塔塔基础研究所出版了拉马努金的笔记本。这是用手写体印出的开本很大的两厚本书,总重量超过 10 磅(约 4.5 千克)。

此前,只出版了包含拉马努金已发表过的文章和他写给哈代的信的《论文集》。这使李特尔伍德在 1929 年为拉马努金的《论文集》写评论时想到“这些笔记本才能给拉马努金本人一个更确定的形象”。已发表的论文至多表现出一个经过哈代的编辑和磨光,经过包装打扮的拉马努金,而笔记本才是原汁原味的拉马努金。

1962 年 10 月 8 日,一群人聚集在马德拉斯乔治城区林吉切蒂街(Linghi Chetti Street)北端有 300 年历史的马利克斯瓦拉庙(Mallikeswarar Temple)。半个世纪前,拉马努金曾在这条街上漫步。在装饰华丽的庙门口阴影下,穆塔皮特中学(Muthalpiet Higher School)的数学教师 P·K·斯里尼瓦散把他的朋友们召来讨论一项计划。他第一次读到拉马努金是 20 年前了,自此以后,他一直鼓励学生们以他为榜样。然后是 8 年前,他的一位朋友带他去见了佳娜琪和拉马努金的弟弟蒂鲁纳拉亚南。现在,拉马努金 75 岁诞辰快到了,P·K·斯里尼瓦散准备出版一本纪念文集,内容是信件和回忆录,以此来纪念他。

他找来这个中学的校友,就是“大孩子”们来帮助他。他在当地报纸上登广告,访问认识拉马努金的人,并收集信件,当他发现有人对某个广告或从相互接触中稍微显露出一点点兴趣时,他马上追询下去。他时常耐心地坐在一边,看别人在一个老箱子中搜寻一封还模糊记得的来信。有时他会带一位既懂泰米尔语又懂英文的速记员去把谈话内容记下来。

拉马努金 75 周年诞辰的纪念活动在整个南印度进行,贡

伯戈纳姆中学以他的名字命名。发行了他的纪念邮票。邮票上印着他的缩为 1 英寸(约 2.5 厘米)大小的护照照片,蜡黄色,票面值为 15 新派沙\*,邮票发行当日就销售了 250 万枚。在马德拉斯,临近他的生日时举行了庆祝会来纪念他。许多当时认识他或他家人都在这个城里,P·K·斯里尼瓦散利用这个机会派大孩子们站在入口处,征集评论文章、信件和回忆录。

另一次,他造访了拉马努金在贡伯戈纳姆的老住房。蒂鲁纳拉亚南允许他自己去翻一个单独锁在一间房间里的衣柜。P·K·斯里尼瓦散当着房客的面打开了这间房,当他打开这个积满灰尘和蛛网的衣柜时,冲出来一群蟑螂。尽管蒂鲁纳拉亚南肯定地说什么也不会找到,他却意外找到了一封拉马努金从英国寄给他父亲的信。

经 P·K·斯里尼瓦散编辑的这些信件和回忆录在 1968 年出版。拉马努金的略传,英文本在 1967,1972 和 1988 年出版;泰米尔文本在 1980 和 1986 年出版;其他印度语言如印地文、卡那达文和马拉雅拉姆文等版本也先后出版。

然后是 1974 年,德利涅(Pierre Deligne)证明了  $\tau$  猜想。

几乎是 60 年前了,1916 年拉马努金曾发表一篇论文,其标题并不引人注意:“论某些算术函数。”一个算术函数就是一个在研究整数  $n$  的某些性质时出现的函数:例如  $\pi(n)$  是不大于  $n$  的素数之个数,  $p(n)$  是  $n$  的分划数,这两种函数拉马努金都研究过,就是两种算术函数; $\tau$  函数  $\tau(n)$  则是另一种算术函数。

\* 派沙(paisa),当时印度币制单位,1 卢比 = 100 派沙,paisa 的复数形式为 paisa。——译者

拉马努金的论文一开始说，“令  $\sigma_s(n)$  表示  $n$  的因子的  $s$  次幂的和。”例如  $n=6$  的因子是  $6, 3, 2, 1$ , 例如设  $s=3$ , “则因子的  $s$  次幂的和”  $\sigma_3(6) = 6^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 252$ 。但是怎样才能一般地算出  $\sigma_s(n)$  呢？这个问题引导拉马努金在 15 页之后达到了  $\tau$  函数，哈代在 20 年后写道：其性质“是非常引人注目的，而且至今还没有完全了解。”正如在解析数论中那么多问题一样，一个貌似简单的问题大门敞开着，可是一旦走进了这道门，就跌进了一个复杂的可怕的数学深渊。

当时哈代称之为拉马努金猜想，也就是现时人们通常说的  $\tau$  猜想，并没有给出  $\tau(n)$  的显式。它只是宣布了“ $\tau(n)$  之阶是……”之类，换句话说，正如同在素数定理中那样，它只是一个近似。拉马努金写道：“有理由假设， $\tau(n)$  之形为  $O(n^{11/2+\epsilon})$ 。”这个记号是表示以下事实的方法之一，即：它的值虽不知真正是什么，总小于什么东西，什么是“什么东西”呢？除了还差一个常数倍数以外，它最多是  $n$  的某次幂，而这个幂比  $11/2$  大一点，大多少都行（所谓  $n$  的  $11/2$  次幂就是  $n$  的平方根的  $11$  次方）.\*

用塔塔基础研究所的拉加万 (S. Raghavan) 的话来说，这个问题“把多如河汉群星的杰出数学家挡住近 60 年”，是数论中未解决的主要问题之一。哈代在 1940 年的一篇文章中既讲了它所引起的兴趣，又指出了它的棘手之处。他报告说，拉马努金本人证明了  $\tau(n) = O(n^7)$ ；但这里  $n$  的幂为 7，比  $11/2$  大得多，所以离  $\tau$  猜想的证明还远着呢。两年后，哈代本人把这个幂削减成  $O(n^6)$ ，离  $O(n^{11/2+\epsilon})$  近多了。1927 年，克鲁斯特曼 (Kloosterman) 走得再近一点。1933 年，达文波特 (Davenport) 和萨利 (Salie) 更近了一点。到了 1939 年，哈代的一

\* 这两段的文字略作修改，使之在数学上更确切一些。——译者

个学生,苏格兰数学家兰金(Robert Rankin)证明了 $\tau(n) = O(n^{29/5})$ 。

这有点像是抓一个凶手:首先知道,这凶手住在联合街,门牌号小于2170,后来又发现号码小于2160;然后又是小于2158……但您仍然无法证明,您的主要嫌疑犯就住在2155号。

直到1974年,比利时数学家德利涅才用一个代数几何领域公认为有力的新工具证明了这个猜想。这被认为是“20世纪数学最著名的事件之一”。德利涅后来也因为这个大胜利得了菲尔兹奖,而这个奖项在数学界被认为相当于诺贝尔奖。

德利涅做到了这一点,也就大有助于巩固拉马努金的名声。

1988年,当伯恩特(Bruce Berndt)回顾这么多年来拉马努金名声的起起伏伏时,把他比作巴赫(Bach)\*在1750年去世后多年不为人知,伟大的转机出现在门德尔松(Mendelssohn)\*\*在1829年3月11日演出了他的《马太受难曲》;对于拉马努金,伯恩特认为类似的转机是安德鲁斯在1976年发现了他的《失去的笔记本》(The Lost Notebook)。

安德鲁斯是威斯康星大学一位年轻的访问教授。那年4月末,他去法国参加为期一周的会议,他若停留3周而不是1周,机票价格就可以优惠一些。所以他就去找一点事做,找一个机会和妻子、两个女儿在欧洲多度过一些时间。顺访剑桥如何?那里有一位同事提出他可能有兴趣翻阅一下沃森在1965年去世后留下的一些手稿,于是就确定去剑桥。

\* 巴赫(Johann Sebastian Bach, 1685~1750),德国作曲家。——译者

\*\* 门德尔松(Felix Mendelssohn, 1809~1947),德国作曲家。——译者

沃森在第二次大战前曾多年研究拉马努金的手稿，是战前时期主要的分析学家，也是皇家学会会员。他死后，皇家学会请 J·M·惠特克 (J. M. Whittaker)——他是沃森著名的合作者<sup>\*</sup> 另一位惠特克 (E. T. Whittaker) 之子，后者也是皇家学会会员——为沃森写一篇讣告。于是 J·M·惠特克去信沃森的遗孀，问可否看一看他的遗作。于是她请他去午餐，饭后引他上楼进了书房。惠特克回忆道，在那里：纸张

铺满了一个不小的房间，厚度近尺，杂乱地堆在一起，准备再过几天就送去烧掉。只能凭运气 [到纸堆] 去摸，又因为沃森从来不扔东西，摸到的可能是一页数学，但更可能的是一个已付款的账单或 1923 年个人所得税的退税单。真是吉星高照，我第一次就摸到了拉马努金的材料。这个材料共 140 页，是 1923 年迪尤斯伯里送给哈代的稿子的一部分，后来转到沃森手上。惠特克在他的“幸运的一摸”以后就转交给兰金，后者于 1968 年又把它转交给三一学院。

惠特克和兰金都是高水平的职业数学家，但他们的背景使他们不易看出这个材料与已发表的笔记本上的材料是否不同。安德鲁斯现在所看出来的，正是他们没看出来的。不用几分钟，他就看出，其中有一些是关于仿  $\theta$  函数的（这正是他自己的博士论文题目），或是相关的主题，这说明，这极可能是他在临终前一年内在印度做的工作。

安德鲁斯高兴得发抖：“我极度兴奋，因为我手上拿的是极为壮观的东西。”现在怎么办呢？当然，先去复印这些论文。

三一学院图书馆内之美使人目不暇接。它的美是出于伟大的英国建筑师雷恩之手。当它于 1695 年落成后，有人讲到

\* 两人曾合写著名的《现代分析教程》(A Course of Modern Analysis)，1927 年出版。——译者

雷恩图书馆时说“它会触动每一个第一次看到它的人的灵魂”。处处是精美的木雕，彩色玻璃窗，雕像填在墙上凹进处，沿墙放着剑桥大人物的胸像。托瓦尔森(Thorvaldsen)\* 雕塑的拜伦像站在远远的一端。在雕像后一条长桌子上，图书馆为学者们安排座位研究中世纪的手稿，如牛顿的论文，弥尔顿的诗。在 1976 年，安德鲁斯就是这些学者之一。对于他，雷恩图书馆“是一个殿堂，牛顿的胸像对您怒目而视，想到要走到办公桌前复印一点东西令我不寒而栗”。

他鼓足勇气对他们说了自己的请求，“大约要 7 英镑的寄费才能航空寄到美国，”他们这样警告他，“行吗？”

行，他让他们放心，“我原准备把房子抵押出去来弄到这批稿件”。

他在不久后发表的一篇文章里公布了这件事，安德鲁斯把他的发现命名为《失去的笔记本》。数学家莱默尔(Emma Lehner)感动地说，它的发现“就好比突然发现了贝多芬的第十交响曲的全本大纲”。

但是这个命名却使有些英国人生气了。例如，兰金指出这不是一本“笔记本”，而是活页纸，而且未受损害地保存在雷恩图书馆里，它从来没有失去过。但安德鲁斯后来仍说：“这些手稿和它所包含的了不起的结果，不被数学界提及或论述已超过 55 年了”，在这个意义上，它确实是“失去”了的。他自己的贡献不在于“保存它们不致湮没，这是[惠特克和兰金]已经做到了的”，而在于认出了它们究竟是什么。

早些时，在 1974 年 1 月，当伯恩特在普林斯顿高等研究所带薪休假时，看到一篇论文与自己两年前的工作有关，证明了拉马努金笔记本上的几个公式。研究所的图书馆里没有这

\* 托瓦尔森(1770~1844)，丹麦雕塑家，原文误为 Thorwaldsen。——译者

笔记本的手写体版本,但是邻近的普林斯顿大学图书馆里有。他在那里看见许多相关的公式,看起来与另外一个相似,但是他怎么试也证不出来。他回忆道“这使我很苦恼”。他于是开始一项非正式的工作——证明第14章里的所有结果。这花了他一年时间。后来安德鲁斯访问伊利诺伊大学,并且提到沃森和威尔逊曾花了几个月时间去证明笔记本中的定理,而他们自己的笔记本还在。自那以后,伯恩特从1977年5月起就着手编辑拉马努金的笔记本,“从那以后,我什么别的事也没有做过”。

用计算机检索到1988年的10年间的文献,大约有300多篇论文在标题和索引中提到拉马努金。至于与其他数学领域的联系和交叉引用,也就是戴森所说的“与深层结构和更一般的抽象概念的联系”更是处处可见。“再次严肃认真地对待拉马努金,应该受到尊重,因为他所猜测的不只是漂亮的公式,而且有实质的深度。”拉马努金的工作是一棵大树,它的根伸得又深又远。

他栽种这株树是为了他自己,而不是为了改善印度和世界的物质条件。然而它在地下的根须却延伸到了远离纯粹数学的领域,以至进入哈代可能畏缩不前的应用领域,它们绝非真的“无用”。

## 6. 更好的高炉?

“如果要我解释,解决那些占据了我一生最旺盛的精力的问题,对于一般的社会生活有什么重要性?为什么如此?我必拒绝这种不平等的挑战。”这是哈代在第一次世界大战的枪声才平息时写的。

我不能厚着脸皮来讲一个明明不真实的命题。我必定要

让位于工程师和化学家,让他们带着预言式的热诚来说明汽油发动机、石油和炸药给文明带来的好处。即令我能实现我一生的每一个科学上的雄心壮志,帝国的疆界也不会向前推进一步,一个黑人也不会被炸成碎片,也不能造就任何人的财富,特别是不会造就我自己的财富。一个纯粹数学家必须把减轻人类痛苦的重任让给他的更有幸的同僚。

工程师和化学家是否真的把拉马努金的工作应用于生活的公共目的,又怎样去应用,这在印度是一个敏感话题。印度似乎被种种有很大迫切性的实际问题所包围,印度似乎又天生不太倾向于依赖那些只有在几十年甚或几世纪后才会产生回报的这类研究。“拉马努金的好几个定理在美国已经广泛用于粒子物理、统计力学、计算机科学、密码学以及空间旅行——这些题目都是拉马努金生前闻所未闻的。”1987年12月19日的《印度教徒报》这样对它的读者们说。但是早在拉马努金还活着时就已经有人力图在功利主义的基础上论证其工作的意义了。

拉马努金死后不久,在拉合尔召开的印度数学会第三次大会上,每个发言者都离不了说一下拉马努金的生平和工作。会议主席巴拉克·拉姆(Balak Ram)宣称:“提到拉马努金的名字,就提出了在印度应如何组织和资助科学的研究的问题。”特别是应用研究与纯理论研究的平衡问题。工程师会因自己的发明而得到报酬,像爱迪生(Edison)那样致富。但是为学术而学术又如何呢?社会是否应该为之保留一席之地?他坚持说:是——

每一个稳定的社会都会下意识地或是有意识地相信,如果没有思想家和教师的指导,企求进步会成为痴心妄想。这些思想家有暇清楚地思考与教学;所以我们发现,这种社会对有学问的人给予特殊的保护和建议,向他们提供

闲暇与心理上的激励,以补偿太菲薄的金钱回报。他在强调,如果要保证印度有“进步”,就必须顾及拉马努金们。从长远说,这是会有回报的。

当 1962 年发行拉马努金纪念邮票时,印度邮政局很费了些心思去说明他的工作的潜在应用:“他在黎曼  $\zeta$  函数方面的工作,和其他数学家在另外的背景下同样的研究工作,现在已经和技术进步的齿轮挂上了钩。它被应用于测温学和炉子的研究,目的是为了造更好的高炉。”而他在仿  $\theta$  函数、模方程和其他领域的工作,已经有人指出,可能应用于原子研究。

这些年来,拉马努金的数学确实已经与实际问题有关,哪怕有时只是沾了一点边。例如,晶体学家拉马塞山证明,拉马努金关于分划的工作对塑料的研究有启发。塑料自然都是高分子聚合物,即把同样的分子单位按不同方法组合起来。可以设想,您有一种塑料有 100 万个单体长,另一种有 8251 个,再一种有 201 090 个等等。拉马努金关于分划——即小数如何组成大数——的研究,显然与此过程有关。这正如一根电话电缆分割成许多长度不同的单位,再合起来成为一个整体。

高炉? 塑料? 电话电缆?

还有癌症呢?

1988 年 11 月,美国物理学会东南区在北卡罗来纳州罗利城(Raleigh)举行的一次会议上,3 位德里大学的研究者提交了一篇论文:“用拉马努金的仿  $\theta$  函数对一个孤立波启动癌基因之恶化与扩散的研究”,他们应用拉马努金的数学帮助理解癌症,是对这个广泛而复杂的数学领域的略微沾了一点边的小小贡献。当《印度教徒报》注意到这篇论文时,它却加上了一个标题:“拉马努金的数学帮助战胜癌症”。

在其他领域中,拉马努金的数学起了比较决定性的作用,例如在弦论中。这个理论设想宇宙是由小得不得了的弦状包

构成的，弦的运动产生了粒子。不论它是否在现实世界中有根据——目前还无法判断——描述这种弦的数学需要用到 26 维空间，比在现实中所用的三维空间还多了 23 维。分划理论以及拉马努金在所谓模形式这个领域中的工作，在分析弦论时是不可少的。

统计力学中的一个重要问题已证实可以用拉马努金的数学来处理，这就是建立一个理论模型来解释例如液氦在晶体碳的晶格中的扩散问题。碰巧，氦分子在一片（例如）石墨上所占据的位置不会相邻。因为每一个可能的位置都由六个正六边形所成的阵列围着。一旦它占据了一个可能的位置，它周围的六个位置就定义了一个不可突破的六边形的墙。1987 年，堪培拉的澳大利亚国立大学的巴克斯特（R. J. Baxter）综述了他在 7 年前获得很有威望的玻尔兹曼奖的这个模型。他证明这个“硬六边形模型”后面的东西，从数学上说是建筑在一组特定的无穷级数上的。而“这些级数，”他注意到，“正是那些出现在著名的罗杰斯—拉马努金恒等式中的级数”（虽然他在 1979 年自己发现这些级数时并没有注意及此）。以此为基础，他找到一种方法来确定某个特定位置恰好被一个氦分子占据的概率；从这个模型产生的预测与实验密切符合。“罗杰斯—拉马努金恒等式”，巴克斯特下结论说，“可能并不如哈代所喜欢的那么远离‘普通的人类活动’！”

在 1920 年连做梦也想不到的计算机，也和拉马努金的研究工作挂上了钩。“计算机代数的兴起使得研究某一类人变得很有趣，这些人的脑袋里似乎有个计算机代数软件包。”安德鲁斯有一次在与一位来访者谈起那种使代数运算变得容易的软件时说。在另一次他又说，在研究拉马努金的工作时，“我有时会奇怪，如果他有像 MACSYMA 或 SCRATCHPAD 那样的符号代数软件包，拉马努金该能做出多少东西。更多的时

候,我觉得他自己就是一个杰出、灵巧而且有直觉的计算机,所以他其实不需要这种软件包。还有,拉马努金的笔记本中也有一个模方程,它能给出计算  $\pi$  的算法,是当今使用的最快的算法。”

戴森批评有些人不适当当地夸大拉马努金工作的实际应用是“吹牛”。说他的数学可以用于弦论是“言过其实”。他说:“要研究弦论并不需要读拉马努金的著作。”但是说它有关系是不错的,而且就其现状而言是完全有效的,但对于绝大多数数学家来说,即便不说两者毫无关系,顶多也只能说是有些表层的牵连。

是什么使拉马努金的工作如此诱人呢?这并不在于它有解决现实世界问题的前景,而在于它的丰富、美和神奇——只在于它在数学上可爱。哈代曾为之倾倒,戴森也是,还有塞尔伯格、埃尔德什和许许多多其他人。“最好的数学家似乎能一眼就看上拉马努金”,威斯康星大学的数学家阿斯基这样说,他也深深地卷入了拉马努金的工作。“我们其余的人先是需要他的某些工作,然后才赏识了它。”安德鲁斯有一次告诉一位来访者他是怎样在年轻时就被拉马努金—哈代分划公式吸引住的:“我一看见这个公式就为之目瞪口呆。我无法相信它。直到看见如何解释它们,懂得它们,懂得他们为何成为这个形状,……有了这种经验以后,我才信服它正是我所追求的数学领域。”

因为拉马努金的工作处于高处不胜寒的世外之境,又因为完全掌握它需要一种绝大多数人未曾受到过训练的语言,所以它只能给少数人——几百至多几千个数学家与物理学家——以直接的快乐。我们其余的人只能或者坐在边线外跟随懂行的权威人士欢呼,或者相信对其工作的模糊的、比喻性

的因而必然不精确的管窥之见。

有些研究拉马努金的专家，则只好借助于其他更易接受的领域中的语言，以表达他是怎样领会数学想像力的。

莱默尔还记得，他把《失去的笔记本》比喻为贝多芬的一部未为人知的交响曲。

沃森是这样结束他在 1937 年伦敦数学会的主席讲话的：他说拉马努金的公式使他产生一种“战栗”，“与我进入美第奇礼拜堂\* 看见米开朗琪罗 (Michelangelo) 为美第奇墓雕的四座像——分别代表‘昼’、‘夜’、‘旦’、‘夕’——时感到的战栗一样。”

伯恩特把拉马努金比作巴赫。在隐喻拉马努金把自己奉献于数学时，他引用了雪莱 (Shelley) 的诗《颂智慧美》(Hymn to Intellectual Beauty)：

我曾起誓贡献我的一切力量  
给您和属于您的一切；我守誓了吗？

对于外行来说，只能通过别人的讲述来领略拉马努金之所为的数学成就；看一些模糊不清的图片，通过比喻、诗句去了解，当然都是很肤浅的。这肯定是不能令人满意的，因为这离拉马努金之所为距离太大了。说真的，谱写一曲奏鸣曲也是同样神秘的事，但是其结果却更深切地触及了我们的五官。

拉马努金之所作所为将会永存。肯定地说，它不可能如甘地、莎士比亚或巴赫的工作那样活在广大人民的心中；然而他的观念和发现将透过少数人的心智与公众的工作相关联，融入宇宙的智慧，再进入人类知识的又深又广的大海。哈代在讲到纯粹数学家的工作时写道：“我们所做的可能很渺小，

\* 美第奇礼拜堂是意大利佛罗伦萨望族美第奇家族的石棺墓，墓中雕刻均出自米开朗琪罗之手，只有两尊雕像由其弟子仿制。——译者

但它却有某种永恒性。而完成哪怕稍有一点永恒性的东西，一首诗也好，一个几何定理也好，都是做了绝大多数人力所不及的事。”

当 1987 年拉马努金诞生 100 周年之时，他的声誉又发出了新的光辉。在印度，人们把他与尼赫鲁和诺贝尔奖得主物理学家拉曼相提并论。在大体相同的时间也庆祝了这两人的百年华诞。关于他的生平，拍了三部印度影片，成立了一个拉马努金数学会，并从 1986 年起发行了自己的刊物。

在南印度处处举行庆祝。安德鲁斯、阿斯基和伯恩特，这三位为重振拉马努金英名作出最大贡献的美国数学家，忙着在全印度走来走去。在安那马来纳伽尔(Annamalainagar)、孟买、浦那、戈勒克布尔和马德拉斯演讲。

在马德拉斯，纳罗萨出版社发行了《失去的笔记本》，拉吉夫·甘地总理也去了，并在第一册上签名，送给佳娜琪。

在贡伯戈纳姆，装在框子里并饰以花环的拉马努金像，有招贴画那么大，由装饰得五彩缤纷的大象抬着，在街上游行。这个拉马努金又是那一个胖胖的，头戴在剑桥接受学位的方顶礼帽的拉马努金，有传统的游行乐队伴随。有国家学生军训练队，还有穿着粉红色裙子与玫瑰色衬衫的女童子军，有传统的舞蹈者；在游行经过拉马努金故居时，撒着花朵，扩音器向聚集在街上的人群高声颂扬贡伯戈纳姆这位著名的儿子。

在安娜大学(Anna University)，有一个计算中心以拉马努金命名，安德鲁斯向佳娜琪送上了一副披肩。他的嗓音因感情激动而哽咽了。他说佳娜琪因为《失去的笔记本》而应当得到这份荣誉，正是她在拉马努金躺着即将离开人世时把他的手稿收集在一起的。

在第二次世界大战以后，马德拉斯大学注意到佳娜琪每

月 20 卢比的津贴是太少了,所以提高到 125 卢比。佳娜琪资助她的儿子纳拉亚南读完了大学。他后来在国家银行谋得一个职位,娶妻成家,有 3 个儿子。最近,他从事这个工作 25 年后退休,有了更多的时间来照顾他的母亲。

佳娜琪在经历过艰苦的生活和多年不为人知以后,当她的丈夫重新为人们发现时,她开始得到人们的注意。她越来越直言不讳了。有一次,在马德拉斯大学给她津贴时,她说钱当然是好的,但是如果能早给她 60 年,就会为她带来更大的好处了。早些时,在 1981 年,她对一位印度记者说:“好多年前他们就说过,要给我的丈夫塑一座像,塑像在哪里?”

迪克·阿斯基 (Dick Askey) 听说了佳娜琪的埋怨,他想:“如果她只是想要一座丈夫的胸像,我们有欠于拉马努金和有欠于她的却是那么多。”“我们”是指全世界的数学家。阿斯基认识明尼苏达的雕塑家格兰伦德 (Paul Granlund),并曾买过几件他的作品,就去与他联系。格兰伦德同意去做,只要至少能从此计划中卖掉 3 座(实际上卖了 10 座)。阿斯基和他的妻子买了 1 座,天体物理学家钱德拉塞卡(阿斯基写信把这个想法告诉他)也买了 1 座。但是从哪里给佳娜琪搞到 3000 美元呢?阿斯基从一些机构,包括三一学院,筹得一些。但大部分由世界各地的数学家每人 95 美元捐赠而得。今天,格兰伦德按拉马努金的护照照片所塑的拉马努金青铜胸像,就立在马德拉斯佳娜琪那座屋子里的一个垫座上。

随着拉马努金百年寿诞的接近,这房子成了朝圣之所。经过马德拉斯的数学家都来向她致敬。她出现在英国关于拉马努金的一个特别电视节目“来自一个印度职员的信”中,此片在美国也播放了。在百周年的 8 月,一个基金会送给她 20 000 卢比和每月 1000 卢比的津贴。她要求建立一个斯里尼瓦萨·拉马努金基金会,向出色的青年数学家发放奖金与研

究津贴。第二年早些时，一一学院也作出了自己的姿态，它的理事会于 1988 年 2 月同意“在另有进一步通知前，每年给予 2000 英镑的资助”。

当百年华诞临近时，马德拉斯一位泰米尔语记者兰加斯瓦米(T. V. Rangaswami)，专为拉马努金写了一篇长文，后来成为由 31 个部分组成的连载。他为此花了好几个月收集信件、文件和照片，并且去询问佳娜琪。她住在特里普利卡内，离他很近。每天下午他们见面谈话。有一个下午他把一张“戈美特拉”的照片给她看，就是在哈灵顿路上拉马努金由她看护而在此去世的房子。离那里发生的事件相隔已 60 年了，这位满脸皱纹的老妇人放声痛哭。

## 7. 自 生

在印度，多年来倾注于拉马努金的赞扬中时时流露出一种甘苦参半的浓烈气息，有着对贫穷的悲惨回忆，也提醒人们注意官僚主义以及几乎在 1905 年毁了他的僵化制度。拉马努金是对印度的鼓舞，这是真的，但又是一种斥责。印度怎么能几乎让这个世界失去他？为什么他一直没有得到更多的鼓励？为什么要等外国人来使他扬名呢？

著名的英国生物学家霍尔丹(J. B. S. Haldane)一生最后那些岁月都住在印度，在 20 世纪 60 年代早期他这样抱怨：

今天在印度拉马努金甚至无法在一个农村学校里谋一个教职，因为他没有学位。更不可能通过联邦公共事务委员会得到一个职位。这个事实是印度的耻辱。我注意到，他是在成了皇家学会会员之后才在印度得到一个讲席的。但是这是一个丑闻：印度的伟大人物要等外国的认可。如果拉马努金的工作早在印度就得到后来在英国

同样的承认,他可能就没有必要远居异邦,而可能今天还活着。我们可以就拉马努金的不被承认而责备英国的“主权”,但如果今天再出现这样的事,我们就不能再这样做了……

在 1974 年拉马努金的生日,一个拉马努金教授国际纪念委员会发行了一本纪念文集,其中散见的南印度公司的小广告,向他表示“诚恳的尊重”之类,其实是想沾一点拉马努金的余辉:从哥印拜陀的马德拉斯铝业公司到马德拉斯兰伽纳坦街的美丽服装店。英迪拉·甘地总理从新德里写来的文章说,拉马努金那“未受教育的天才”使科学为之目眩,而“他的成就将鼓舞几代印度青年”,但是编者拉马克里希南(S. Ramakrishnan)加了一段:“希望自由印度再看不见那些活着的拉马努金在微贱中凋零。”

在微贱中凋零——拉马努金作为印度的象征还透视出另一个方面,尼赫鲁在 1946 年《印度的发现》(Discovery of India)一书中提到了这一点:

拉马努金短暂的一生和死亡是印度某种状况的一个象征。在我们成百万人口中有多少人得不到教育;又有多少人生活在饿死的边缘……如果生活向他们敞开大门,向他们提供食物和健康的生活条件、教育和成长的机会,这些成百万的人中会有多少人成为著名的科学家、教育家、技术人员、工业家、作家和艺术家,为建设一个新印度和一个新世界而尽力?

拉马努金的母校,贡伯戈纳姆市立中学后来的一位校长维斯瓦纳坦(R. Viswanathan)坚持说,只要有财力,他可以培养出好多个拉马努金。从全面看,他当然错了。整个英帝国的财富,整个欧洲的丰富的智力传统,美国的全部自由和机遇,在好几个世纪中也才培养出屈指可数的几个拉马努金来。但是维斯瓦纳坦仍然表达出了一个更大的真理——印度有着极

广泛的才能和能力的储备,得不到充分发展的条件。拉马努金不仅代表了他的祖国的智力和精神力量,同时也代表了它的尚未发掘的潜力。

但是拉马努金的故事不也证明了相反的结论:天才终于战胜?如果拉马努金在如此逆境下仍能引起世界的注意,留下了不可磨灭的印记,那么任何一个具有特别才能的人岂不也能做到这一点?

并非如此,拉马努金在那么长的时间内没有活力,他的未来的转机那么多次悬于一发,他那么接近于不为人知地死去;而且坦白地说,他的全部前程永不能完全实现。他的生活给我们的教训是他所遇到的障碍,当然在同样程度上也是关于他的成功,可以说是克服这些障碍的成功。

拉马努金的道路比之成百万的其他印度人宽得多。他的家是贫困的,但远非赤贫。他是一个婆罗门,这是一种文化中比较鼓励学习的那一部分人。他的母亲容忍他的种种怪念头,而且为他的利益尽了全力。他的天真的魅力超过了他的怪癖,而那些怪癖本来会使人远离他而去。而且,他对自己和自己的力量有一种特别顽强的信念。

人们一定会问,要是没有这一些又会如何?即令他有同样多的天才,能给予这个世界同样之多,但是他的母亲对他不那么支持,又会如何?或者,如果他稍有一点使人不喜欢,或者对自己的能力不那么肯定,又会如何?毫无疑问,他会和他的弟弟们有同样的结局:以一个无名的政府小官员终其一生,或者以其他方式归于凋零。对于那些有人为之立传的人,名副其实的是“制度”在起作用;失败者就是那些得不到世界的恩宠和温暖惠顾的人,失败者是您永远不会知道的人。

拉马努金既使印度困窘丢脸,也使印度鼓舞。他使人们

想到,印度其他的拉马努金要想有所成就会受到何等的煎熬。作为印度的天才的象征,沉思是他的一种快乐,但想想他一生的艰难就不那么快乐了。

1968年11月,天体物理学家钱德拉塞卡接受印度科学院拉马努金奖时暴露了拉马努金曾企图自杀一事,他的评论激起了一阵怒火。“我颇为震惊,”他后来写道,“有好几个人[包括他的叔父拉曼]攻击我给拉马努金的美名抹黑。”也有人攻击他贬低拉马努金而抬高自己。钱德拉塞卡犯了罪:他打破了拉马努金的偶像地位,而还他以人的本来面目。

今天正如当年的拉马努金那样,许多印度最好的头脑纷纷出了国,在国外,他们受到西方观念的滋养,绕过了当年窒息了拉马努金的“无效率无弹性”的教育制度。印度是一个穷国,要它大方地歌颂那个早已去世的拉马努金很容易,要它慷慨地把资源用于发现和培养新的拉马努金就不那么容易了。

1951年,一位富商和高等教育的赞助者阿拉伽帕·切蒂亚尔(Alagappa Chettiar)创立了拉马努金研究所。富商一死,研究所就遇到了严重的财政问题而几乎关门。1957年,马德拉斯大学把它接收了,改名为“数学高等研究中心”。1972年,它被搬到一座矮小的现代建筑中,与大学主校园以一座跨过白金汉运河的小水泥桥相连。研究所有19位教师、讲师和研究生,今天还在那里。但它并不专门研究拉马努金所探讨的数学领域,它的名称也没有闪着命名者的光辉。

甚至百年庆典也因提到印度给拉马努金们提供的机会之少以及在他们的道路上铺设的障碍之多而失去了光彩。有人问,为什么拉马努金1914年以来的研究报告在印度人的照管之下会丢失呢?为什么要等到美国的而不是印度的数学家来为拉马努金恢复名誉呢?一位发言者拉马塞山在贡伯戈纳姆的纪念会上这样对他的听众说:

我要求你们都坐下来想一下，在拉马努金出生已 100 年后，今天这个国家有多少个教务长，或者关于这件事有多少个大学副校长，会给一个尚未入大学而考试又不及格的学生以今天只值 2000 卢比或 2500 卢比的研究经费呢？印度独立已有 40 年了，我们再也不能责备殖民强国不愿鼓励印度有才能的人了。

《印度图片周刊》(Illustrated Weekly of India)的一位作者在讲到拉马努金时说：“是不是他的智慧之光在今天印度人智力贫瘠之时，太使印度人难堪了呢？”

拉马努金是一种鼓舞吗？拉马努金是一种斥责吗？拉马努金是一种……？不论您想得到一种什么样的教训，都可以拉马努金的一生作为警示。在印度数学会早年的一次会议上，人们引用他的名字来讲学会的财力何等微薄。“当著名数学家拉马努金 F.R.S. 想由本会得到很微薄的资助，以致力于数学研究时，本会之破产就成为明显之事……”在 20 世纪 50 年代，一位图书馆长向《威尔逊图书馆通报》(Wilson Library Bulletin) 的读者重述拉马努金的故事时，强调了卡尔的《汇编》一书对他的影响。他说，拉马努金的一生就是那些养育了他的书之价值的证明。这许多年来，一直到现在仍然如此，拉马努金似乎总是被用来作为一种模范、一种鼓舞、一种警告，或者一个有教益的历史个案。拉马钱德拉·拉奥这样做过，哈代这样做过，尼赫鲁也这样做过。

他的生命突然折断了，如同一个锥切掉了锥顶。也如同一条经济曲线，突然停止了，留下漫长而不确定的未来，任由预报者去填补。在拉马努金的生平中，处处散布着“可能是什么怎么样”，就好像是：您想怎样看他，都很容易那样去看他。事实公平地驳斥了这些解释。

他在学校里不及格证明了印度未能抚育自己的人吗？拉马钱德拉·拉奥和纳拉亚纳·耶尔向他伸出援手，不是证明印度终于承认、赏识了他吗？

他是“英国主权”压迫的例子吗？一个几乎被废的土生天才，后来出了头，对“英国数学”作出了贡献？或者是，他之被发现证明了英国的恩惠？

如果他早年就得人教导，他会成就更大吗？他会变成另一个高斯或牛顿吗？或者是他在不甚理想的条件下自己苦干，反而使他在数学上更有源源而来的活力，甚至会增强他的令人惊奇的独创性？

他的天才只是智力的产物，与其他数学家只有程度之别？还是浸透了某种神秘的、甚至超自然的东西？

拉马努金的一生是一个前程未能完成的悲剧吗？或者说，他在剑桥的五年弥补了这个悲剧？

对每一个如此的问题，无论怎么看，都可以找到大量证据。拉马努金的一生就如同《圣经》，如同莎士比亚——是原始资料的丰富源泉，疑义丛生。如同举起一面镜子，让我们照见自己，或者照见我们的时代。

拉马努金的家族中没有一个数学家，看不出一点倾向于数学的不同寻常的气质。那么他是从哪里来的？

有许许多多人在发现拉马努金或其他方面对他的一生起了很大作用。拉马斯瓦米·耶尔后来说，他一生中有两件事值得骄傲——创立了印度数学会和发现了拉马努金。纳拉亚纳·耶尔一家到今天还不无骄傲地指出他们对拉马努金族长式的作用使他免于湮没。还有无数的人后来说自己在劝拉马努金去英国有功。然而也有很多人指出，拉马努金就是他母亲的产物。很明显，他们有着同样的品质，她的心一直与他的

成功紧密相连。

在英国人中,哈代也不是惟一可以欣赏自己在拉马努金的一生中起作用的人。内维尔也甜蜜地回忆起在四分之一个世纪以前,他怎样和拉马努金相逢于马德拉斯,而且说“如果他没有得到拉马努金和他的朋友的信任”,拉马努金可能永远也到不了英国。但是哈代当然是首选。埃尔德什记录了一件事,当有人问哈代,他对数学的最大贡献是什么时,哈代毫不犹豫地回答:“发现了拉马努金。”另一次,其实也有记载,哈代直称拉马努金为“我的发现”。

当然,在一定意义上是这样的。但是有一篇文章更好地解释了拉马努金作为一个人物出现在世界数学舞台上。此文在他一百周年诞辰时发表于印度,作者姓名不详,因为他只注明了“RGK”。他说拉马努金是 *swayambhu*——自生的。他在印度的土壤上自己发芽生长,他自己创造了自己。

您谈论拉马努金时少不了要用“自我”一词。他是自我立志的、自我指导的、自我创造的。的确,如果说他从事数学是“为了自己”,那也是有道理的,因为他从事数学就是因为他爱数学,而没有多想对他的家庭或他的祖国有什么益处。

拉马努金做他愿做的事,走他自己的路。只是到了他沉醉于数学创造的欢乐以后,他才醒过来,发现自己偏离人类交往共同的航路已经有多远。可能这时他才关心,有时又是痛苦地十分关心:别人对他的看法。

当他还是少年时,他关心当地的疯子,不在乎贡伯戈纳姆的其他人都以为他是一个怪人。他把自己交给数学,一切都置之度外,连他母亲看成是饭票的学位也一样。他敲遍了南印度所有数学家的门,他写信给贝克,他写信给霍布森,他写信给哈代。

是哈代发现了拉马努金吗?完全不是,看一看 1912 年和

1913年发生的事就说明,是拉马努金发现了哈代。

对纳马卡尔的梦又怎么说呢?据说是娜玛吉利女神祝福他的英国之行?那么拉马努金从哪里下意识地得到更强大的推动力来忍受他的另一个“更真实的梦”,即后来出现的种种事态呢?

拉马努金是这样一个人,如同李特尔伍德说的“什么是一个证明……他可能完全不具有一个清楚明确的概念”。只要他满足于一个定理是真的,他就没有多少兴趣对别人证明这一点。在这里,证明这个词是就它的数学意义来讲的,如果用比较广泛一点的意义来理解这一词,拉马努金其实没有什么需要证明的。

他就是他自己,他造就了他自己。

“我并没有发明他,”哈代有一次讲到拉马努金时这样说,“他像其他大人物一样,是自己发明了自己。”他是 *svayambhu*——自生的。

拉马努金到底需要什么?

他什么也不需要——他需要一切。

他不祈求财富。可以肯定,除了工作之所需,以及给他的家庭以他认为家庭希望于他的财富外,他不再需要其他的。

他确实渴求尊重、理解或者还渴求历史对他的有利的判断。

但是拉马努金更需要的、超过这一切的,只不过是按他的意愿去工作的自由,让他一个人单独去思考,去梦想,去创造,忘情于他自己创造的世界。

那当然绝对不是很低的期求,他需要“闲暇”。他得到了闲暇。

今天在南印度,每个人都听说过拉马努金。大学教授和三轮车工人都一样知道他的故事,至少知道一个梗概,正如在

西方人人都知道爱因斯坦一样。很少有人大谈他的工作,但是他为得到按自己的条件工作的机会而奋斗的故事中,总有什么东西激起了人们的想像,使拉马努金成了天才的象征,成了直面种种障碍的象征,成了他所承受的重担的象征,成了由于其存在而带来的欢乐的象征。

## 尾 声

哈代得知拉马努金的死讯时，已经离开了三一学院。

1919年12月，大约就是拉马努金在医生坚持下准备离开贡伯戈纳姆回马德拉斯时，哈代写信给当时的三一学院院长J·J·汤姆孙，向他报告自己接受牛津的萨维尔教授职。他这样写道：“这个职务连带着在新立学院的一个评议员职务。接受此职后，我在三一学院的评议员职位会自动空出来。”离职的原因之一是他在剑桥的行政职责日益增加，“我希望保持完全的研究机会，这是我一生主要的永远的幸福。”他确定，自己需要一个提供“更多闲暇和更少责任”的职位。他已得到保证，在牛津他会得到这一切。

信中没有提到，但可能在他的心目中分量重于行政杂务之负担的，是在战争时期留下的强烈的情感伤害，即围绕罗素事件之争斗以及拉马努金的离去。斯诺写道：“如果没有拉马努金的合作，1914年至1918年的战争将对哈代更为阴暗，拉马努金的工作是哈代在学院恶斗中的安慰。”现在拉马努金走了，哈代30年来一直以其为家的三一学院再也无可留恋。他几乎没有讲到他的有些同事。早前，他曾经劝请一位一生多半在国外度过其职业生涯的老数学家W·H·杨(W. H. Young)去申请萨维尔教授一职，现在他又请他撤销自己的名字，而杨也照办了。杨的儿子劳伦斯·杨也是一位数学家，回忆此事时说“哈代觉得他必须走了”。

牛津是另一所伟大的英国大学，离剑桥约100英里（约

160千米)。贾斯帕·罗斯(Jasper Rose)和约翰·齐曼(John Ziman)在《剑津见闻》(Carmford Observed)一书中把这两个大学放在一篇文章中来讲述。他们说：“牛津是一个有着宽阔高贵的大道的城市，有高街(the High)、宽街(the Broad)、圣吉尔斯街(St.Giles)；在剑桥，所有的街道都是随意延伸的。牛津的大建筑都面向大街，高大威严，形成一种令人敬畏的景观；剑桥的大建筑则比较分散，不那么咄咄逼人，比较隐蔽，面向着学院的庭院和花园。牛津更协调，剑桥更散漫；牛津逼人——剑桥诱人。”在学术上，剑桥稍微倾向科学，牛津则倾向经典之学。

新立学院是牛津 20 来个分开的学院之一。这地方像是一个有城墙的城堡，中世纪的城垛，高高的细长狭窄的垛口让弓箭手射箭；这个雉堞墙包围了学院的两个角，衬托着学院花园的树丛、大树和灌木。哈代在搬到新立学院时绕了一整圈。学院是英格兰主教威克厄姆的威廉于 1379 年创立的，比他建造温切斯特学校为其提供新生还要早 8 年。新立学院本是哈代 25 年前的母校温切斯特学校的高才生们的去处，要不是圣奥宾的书改变了哈代的想法，使他另选了三一学院，这里也可能也是哈代的去处。

哈代到牛津才几个月就收到了来自马德拉斯的消息：

奉[大学理事会]示，谨沉痛宣告，拉马努金先生，F.R.S.，已于 4 月 26 日晨不幸去世。

哈尔回信给迪尤斯伯里说：“惊悉拉马努金先生去世，至为震惊哀痛。”但是在他写的第二封信中是否有辩解之意呢？

当他离开英国时，一般都认为，他虽然重病在身，但已经有了康复的转机，体重甚至增加了一英石(约 6.35 千克)之多(有一段时间机体几已消耗殆尽)。我所收到他的上一封信(约两个月前)似甚欢快，而且讲的都是数学。

无论如何,拉马努金当初是被交给哈代看顾的。哈代是否想使自己确信——对所爱之人去世的这种感情反应并非罕见——拉马努金最终的陨落是在他安全地登上回印度的船以后才发生的?

拉马努金之死对哈代的影响是无可怀疑的。

就我而言,我说不清有负于拉马努金的是什么——他的独创性一直是启发我的持久源泉,他的死是我所曾受到过的最大打击。

即使在牛津,大战的幽灵也一直沉重地笼罩在哈代头上,正如同它笼罩着全欧洲一样。反德情绪很深。一位英国科学家在战争即将结束的几个月前还给《自然》杂志写信说:“请相信,至少在 20 年内,德国人将被贬入这样一类人:诚实的人都不愿意与他们来往。”数学家也未能避免这种憎恨之心;许多英国人和法国人都认为应该禁止中欧数学家参加国际数学家大会。

哈代对战争的愚蠢野蛮行为极为反感,他对老年人把青年人送到战场上死去痛恨至极,感到自己与大陆数学朋友之情已被残酷地切断。现在,战争已经过去,他就着手来医治其伤痕。他写信给伦敦《泰晤士报》抗议传播复仇的蠢话。他在恢复和平的工作中与瑞典数学家米塔·列夫勒(Gösta Mittag-Leffler)合作,后者曾长期担任于 1882 年创刊的瑞典数学杂志《数学学报》(Acta Mathematica)的主编。该刊的创办也是在一种类似的情况下,即普法战争后数学家之间关系也很紧张之时。他把对战争的看法写信给伟大的德国数学家兰道(Edmund Landau);兰道也回信谈了自己的看法,用的是数学家的笔法,说是看法一致——只不过要“稍微变一下正负号”。

1921 年,哈代访问德国时写信给米塔·列夫勒说:“就我而言,我完全没有改变自己的观点,决不会去参加那种排斥某

·特定国家的大会，不会去签名，也不会以任何方式直接或间接去协助，不管这种排斥有什么理由。”他抵制了 1920 年在斯特拉斯堡举行的国际数学家大会，因为德国人、奥地利人和匈牙利人被拒之会外。他还抵制了 4 年后在多伦多举行的另一次这样的大会。

停火，拉马努金的离开，哈代本人去了牛津以及拉马努金之死，这一切都发生在一年半之内。但不管怎么说，哈代很容易地与新立学院交好了，感到很自在，而这在剑桥却从未有过。斯诺告诉我们，“这是他一生最愉快的时期”。他被接纳了。牛津的新朋友们很为他激动。他的谈吐文采飞扬，颇得听众欢迎。有时，公用室 (Common Room)——此词相当于剑桥的组合室 (Combination Room)——里的每个人似乎都在等着听哈代的高论。

这段时间，他与李特尔伍德的合作仍在继续，主要通过信件往来。他的数学能力处于巅峰，他的名声也如日中天。卡特赖特回忆起她有一次只是偶然对学院一位搬东西的工人提到“哈代教授班上”，其反应是“对哈代肃然起敬，而那个时期学院搬东西的人对高级员工只是顺从”。

1928 ~ 1929 学年，哈代与普林斯顿大学的维布伦 (Oswald Veblen)\* 交换互访，因此这一年哈代到了美国，而主要是在普林斯顿大学。他在美国讲演的日程安排得很紧，如 1 月 11 日在利哈伊大学，18 日在俄亥俄州立大学，21 日在芝加哥大学，2 月和 3 月在加州理工学院。到了年底，普林斯顿大学校长请他多留一段时间，哈应回信说虽然他在美国“过得很愉快”，但牛津的工作需要他回去。

\* 维布伦 (1880 ~ 1960)，美国数学家。1905 ~ 1932 年在普林斯顿大学讲授数学，1932 年被任命为普林斯顿高等研究院教授。——译者

在这一次或另一次访问美国时,他又喜欢上了棒球。据说鲁思<sup>7</sup>的名字,“现在和板球运动员霍布斯的名字同样经常出现在他口中”。有一次有人送他一本书,签名者是“铁人”库姆斯(Coombs),里面都是些棒球战术问题。他在一张明信片里写道:“这是一本很了不起的书,我打算每天解决一个问题。”

他对板球和网球的爱好也没有减退。在网球方面,他一直在提高球技。哈代在牛津时拍了一张快照,是在晚春或初秋的一个阳光明媚的日子,穿着白色衣服站在一群人中,真是帅极了;大约有十来个网球运动员,这就是1925年左右所谓的“漂亮人物”(Beautiful People)球队。哈代手握球拍站在其中,身穿网球长裤,外套里面是一件带披肩的厚毛衣。

虽然在牛津很快活,1931年霍布森死后哈代仍然回到了剑桥,担任萨德勒教授职。说到底,剑桥比之牛津更是英国数学的中心,而他又得到了高级的数学讲座教授席位。按斯诺的说法,另一个原因,则是这两个大学退休规则不同;在牛津,他65岁就必须让出办公室,而在三一学院则可以终身使用。

有一段时间,哈代定期回牛津呆几个星期,担任新立学院资深公用室板球队队长。当然每年在贵族板球运动场和牛津的比赛他都要到。斯诺写道:“年复一年,这时他总是神采飞扬,身边围绕着朋友们,男的和女的,他几乎完全丢弃了胆怯;他是人们注目的中心,对此,他并非不喜欢;在场地周围1/4的地方都可以听到这群人的笑声。”

哈代原来不得人心的反战观点,现在如果人们还没有忘记,反而得到了赞扬。斯诺记载说,年轻的剑桥数学家们“很

<sup>7</sup> 鲁思(George Herman Ruth, 1895~1948),美国著名棒球运动员,绰号Babe——译者

高兴他会回来：他是一个真正的数学家，与狄拉克(Dirac)们和玻尔(Niel Bohr)们所谈论的数学家不同，他是纯粹数学家中之最纯粹者”。按劳伦斯·杨原来所描绘的，这是剑桥数学家的黄金时期，“不论在精神上或学术上，剑桥突然变得至少与巴黎、哥本哈根、普林斯顿、哈佛以及华沙、列宁格勒、莫斯科有同等地位。”外国来访者原本是涓涓细流，现在却因为犹太人和其他人想逃脱希特勒的德国而变成了汹涌的人潮。

自1933年开始，哈代与科学和学术保护学会(The Society for the Protection of Science and Learning)合作，用他的影响使那些被剥夺了职务的犹太人和其他人能到英国或别的避风港。如里斯(Marcel Riesz)、玻尔和兰道这样级别的数学家都在出逃之列。希尔(A. V. Hill)这样写道：“哈代，在许多方面本属于另一世界，但是出于对同事们的危险与困难的深切关怀，他不仅显示了自己广泛的人道主义，而且还有对学术道德之普遍原则与对兄弟情谊的完美而坚定的忠诚。”

哈代至少退出一个他原是成员的组织。这并不是因为该组织是德国的，而是因为其所作所为。他在纳粹早期写信给莫德尔说：“我对这类与德国的关系的态度是，若非迫不得已，就不采取行动；但若反犹太主义公然成了一个刊物或机构的计划的一部分，我就不能再留在其中。”

1934年，哈代给《自然》杂志写信，驳斥德国柏林大学一位数学教授比伯巴赫(Bieberbach)的谬论，那位教授大意是想证明血缘和种族对数学的创造风格的影响。似乎数学家有所谓的“J型”和“S型”，前者有良好的雅利安血统，后者为法国人和犹太人。哈代冷眼总结了那人的论述后，作了一个好像想找点什么办法原谅他的姿态，可是最终发现自己“被迫作出不甚宽厚的结论，即比伯巴赫居然确信这是真的”。

哈代总是同情被压迫者，而他的政治观点肯定是左倾的。

直到大约 1927 年,他还一直在全国科学工作者联合会中很积极,甚至为它作过几次招募会员的演说。后来霍尔丹转述其中的一次,大意为他对科学家听众们说:“虽然我们的工作和煤矿工人工作大不相同,我们却更像他们而不像资本家。至少我们和煤矿工人都是有技术的工人,而不去剥削别人的劳动。如果要站队,他和矿工们站在一起。”去访问哈代房间的人常会注意到,他的壁炉上摆着爱因斯坦、板球运动员杰克·霍布斯和列宁的照片。

但是在数学界中,他、李特尔伍德及其阵营中的人都公正地以成就论人。1934 年哈代写道,英国数学家已经摆脱了这样一种“盲目的迷信,即要求‘精确’就不可能不枯燥无味,他们对精确的思想有一种神秘的恐怖感”。他在四分之一世纪前推进的革命,今天已经胜利了。的确,后来还有人埋怨,这种迷信阻碍了一些领域的进展,如代数、拓扑学、泛函分析和纯粹数学中其他一些领域。不管怎么说,到 20 世纪 30 年代,哈代已经算是老一辈数学家了。

在这些年里,大大小小的荣誉滚滚而来。1929 年 3 月 6 日,伟大的挪威数学家阿贝尔去世 100 周年纪念日,哈代接受了奥斯陆大学荣誉学位,挪威国王也出席了。

1932 年 12 月 27 日,他得到了肖夫内奖(Chauvenet Prize)。此奖每三年授予一篇用英文发表的数学论文。他得奖之作是“数论引论”。

1934 年 2 月 29 日,他收到苏联驻英大使马伊斯基(J. Maisky)的一封信,信纸上印着镰刀斧头,祝贺他当选列宁格勒科学院的荣誉院士。

雅典、哈佛、曼彻斯特、索非亚、伯明翰和爱丁堡诸大学授予他荣誉学位。他在 1920 年得到皇家学会的皇家奖章,1940 年得到西尔维斯特奖章。他成了许多第一流的外国科学团体

的名誉成员。毫无疑问，他是英国最杰出的数学家。

关于哈代的许多故事都来自这个时期，这是他最有成就的时期。有一个故事说，某年，哈代的“新年决心”如下：

1. 证明黎曼假设。
2. 不能让 211 队在奥瓦尔(Oval)举办的决赛阶段第四局中出线。
3. 找到一个能够说服公众的关于不存在上帝的证明。
4. 成为一个征服埃佛勒斯峰<sup>\*</sup>的人。
5. 公布大不列颠和德意志苏维埃社会主义共和国联盟的首任总统。
6. 刺杀墨索里尼。

另一个故事把他对板球的爱好，他在阳光下的欢欣，他对上帝的宣战和他的怪癖倾向巧妙地结合起来：哈代的合作作者里斯在哈代与他妹妹在伦敦共用的住所做客，哈代叫他到外面去，把伞打开让人人看得见，并对上帝大叫：“我是哈代，我要到大英博物馆去。”这当然是想从上帝那里要一个大晴天。上帝拿哈代没法，只好让步。于是哈代马上跑去打一场午后的板球，好天气该有保证了。

自 1931 年以后的 15 年间，斯诺常与哈代长谈，深知哈代老爱说“老白兰地”，意思是一种“有点古怪、奥秘但还在理性范围之内的趣味”。例如他有一次写信给斯诺说：“从圣乔治广场到[伦敦的]奥瓦尔的半英里路，是我的老白兰地提名的世界上最出色的散步路线。”老白兰地是一种专注于研究的怪癖——年轻人的笨头笨脑变成了一种成年人的形态，变得有一点不自然而且僵化了……

哈代确实就是这样 不知怎地，他就变老了，甚至在

\* 西方人旧称珠穆朗玛峰为埃佛勒斯峰。 —译者

1931年秋，他才54岁时，就有点老态了。维纳当年回到剑桥时，就发现他“现在变成了我当年在罗素房里见过的那个人的上了年纪、萎缩了的复制品”。那可是20年前，哈代也知道这一点。当他回到剑桥时，就因为见到的数学家都是自己不认识的年轻面孔而沮丧。他写道：“在这些年轻人的敏锐和力量中，总有什么东西使我自惭形秽。”

1939年的一天，当哈代打扫书架时，心脏病突然发作。这年他已经62岁了。其后，他就不再打网球、软式网球或板球了。他的创造力也衰退了。有人列出他最重要的文章（他和拉马努金合作的工作全在其中），发现其中没有1935年以后的。现在甚至用最粗糙的标准，即发表论文的数量来衡量，他也在走下坡路——从每年六七篇到1930年末只有一两篇。

数学能力的衰退使他很沮丧，而新开始的对德国的战争更加使他沮丧。但在1941年，年轻的戴森从哈代的母校——温切斯特学校来到剑桥，听了他两年课，却看不出他的衰老。对于他，哈代仍然是神。他和三个高年级学生在老艺术学院一间小房里围坐在桌旁听着，看着几英尺以外的哈代：

他的讲课如同兰多夫斯卡(Wanda Landowska)演奏巴赫，准确而且极为流畅，把他的热情的欢乐展示给每一个可以看透事物表面之下深处的人……每次课都是精心准备了的，如同一件艺术作品，而智慧的结局在每小时的最后五分钟似乎自然而然地出现。这些讲演对于我是一种令人陶醉的欢乐。他穿着白色的板球服，离我只有两英尺。我有时会感到一种冲动，想去抱一下这个小老头，向他用某种方法表示，我们对他愿意继续讲下去是何等感谢。

1942年，哈代从萨德勒讲座上退休。

一年前，一家英国杂志《图片邮报》(Picture Post)的摄影记者抢拍到一张他在橄榄球赛场上的照片。那是一个严寒的冬日，他手持雪茄，法兰绒围巾包得紧紧的，看着剑桥以9:6胜

牛津。这张照片后来登在他的某一卷论文集上。他的妹妹不喜欢它，她说：“这使他看起来这样衰老。”

但他确实是老了。

1946年他基本上已经是残疾人了。斯诺描绘他说：“体力逐渐不支，走几步就要喘气。”他的妹妹来照看他（但三一学院的规矩太严，她必须在半夜12点前离去）。

1947年初，他企图服用巴比妥类药物自杀，但因用量不当而呕吐掉了，一头撞在浴室脸盆上，留下一个黑眼眶，使他很烦恼。

这年晚些时，皇家学会通知他：他将获得皇家学会的最高荣誉——科普利奖章（Copley Medal）。“现在我知道我快完了，”他对斯诺说，“当人们急着给您荣誉性的东西时，只能得到这个结论。”

11月24日，斯诺写信给他的弟弟菲利浦（Philip）说：“哈代快死了（谁也不知道还有几天，但他自己希望快些），我想尽量多在他床边呆些时间。”

确实很快。1947年12月1日哈代去世，正是准备向他颁发科普利奖章的那天。他把大部分积蓄和著作版税都赠给了伦敦数学会，本来这些是打算给他妹妹的。维纳写道：“他的去世，给了我一个伟大时代终结的感觉。”

1939年那次心脏病发作以后，开始了长时期的体力和感情上的下滑，终于使他想自杀。而正是在他病后，在法国沦陷于纳粹后大约一个月，他写完了《一个数学家的自白》，这是他对数学的赞歌。斯诺把《自白》看作是一本“萦绕着悲伤的书”，是一个久已度过自己创造性的黄金时期——而且自己也明白这一点的人写出来的书。哈代写道：“一个职业数学家只能写站在外面看数学的书，这是一种哀伤的经验。”画家们不

是看不起艺术评论吗？是的，每一个做创造性工作的人，包括数学家，都是这样。但是，站在外面写数学，而不是做数学，却是他剩下的唯一能做的事了。

然而，这种哀伤是一个丰富充实的生命在即将结束时的前瞻，而不是虚度年华的痛苦。在《自白》一书中也充满了骄傲、欢乐和深深的满意。

当我感到沮丧，而且发现我不得不听着那些自大的、令人厌烦的人说话时，我对自己说：“我还是做了--件事，这是你们无法做到的，这就是以完全平等的身份与李特尔伍德和拉马努金合作做了一些事。”

拉马努金。后来的这 20 年，拉马努金仍然是他的一部分，如一个不熄的火炬，在他的记忆中闪光。

卡特赖特是哈代在 20 世纪 20 年代的学生，哈代说她是英国最好的女数学家，她说：“他最痛心的事情，他基本上是从不对人说的。”但是当他远离了听他讲话的人，在纸面上，他就自在一些了。这时他倾诉了拉马努金常在他心中，他写道：“我有负于他之多超过有负于世上一切人，也许有一个例外 [李特尔伍德?]，而我与他的交往是我一生的一个传奇性的事件。”

拉马努金死后，哈代开始翻阅拉马努金的论文和笔记本。后来许多数学家都知道这是一件难事。在到达牛津后，哈代写信给米塔-列夫勒说他从拉马努金的遗稿中整理出一篇小文章。“但它内容不够充实，很难达到《数学论著》(米塔-列夫勒主编的杂志)的标准，我现在正在写一篇更重要的文章。但是不可能做得很快，因为拉马努金所有的工作都需要最细心的编辑。”

到 1921 年，他已从拉马努金的遗稿中提炼了足够多的东西，写成拉马努金关于分划的同余性质的工作的续编。关于

这篇准备发表在《数学通报》(Mathematische Zeitschrift)上的论文,哈代写了一个注附在文后,说此文还“非常不完全,若要全文发表,尚需非常细心的编辑。我从原稿中只取了三个最简单而又最精彩的结果,作为这样一个人的工作的简短却又能刻画其特点的例证。此人毫无疑问是他的时代最出色的数学家之一。”

这些年来,哈代的文章中拉马努金的名字也不少见,“关于拉马努金三角函数  $c_q(n)$  和某些算术函数级数的注”发表于 1921 年;“拉马努金笔记本之一章”发表于 1923 年;“拉马努金的一些公式”发表于 1924 年。在 20 世纪 30 年代中期还有“拉马努金在素数理论中的一个公式”;“关于拉马努金的算术函数  $\tau(n)$  的进一步注释”。哈代承认他有欠于拉马努金和李特尔伍德,他写道:“我所有最好的工作都与他们的工作相联系,我与他们的合作显然是我一生中决定性的事件。”

哈代遇到拉马努金时已经 37 岁了,他已实现当三一学院评议员的童年梦想,已经是皇家学会会员。但是他与李特尔伍德的合作还只是开始,而他自己早期对数学的贡献,按别人的标准来看已经很了不起了,但在他自己看来还是算不了什么。

就在这时,拉马努金突然进入了他的生活。

不管怎么说,拉马努金是对哈代所蔑视的 Tripos 体系的活生生的例证。仅仅依靠他的直觉以及在石板上长时间的艰苦的涂涂画画,补足了他在教育上的欠缺。他是如此地专注于数学,所以完全顾不上再去学那些为获得学院学位必须的其他科目。“这个贫困而又孤独的印度教徒,”哈代这样称呼他,“用自己的头脑去硬撞多个世纪积累起来的欧洲智慧。”他重新发现了整整一个世纪的数学,而且又作出了将要使下世纪的数学家为之着迷的新发现(而且完全用不着 Tripos 教

练)。

哈代为这样一个人着迷有什么可奇怪的呢?

从那以后,整整35年,哈代尽自己之所能来支持拉马努金,传布他的数学遗产。他鼓励拉马努金,承认他的天才,把他带到英国,用现代分析训练他。还有,在拉马努金生前和身后,哈代仍然以自己可观的文学技巧为他服务。

“哈代的英文十分优美”,《曼彻斯特卫报》(Manchester Guardian)讲到这一点时,特别提到他为拉马努金写的悼文,说是“应列入关于数学的最出色的文章之列”。数学家贝利说:“它是我所读过的最吸引人的悼文。”正是哈代关于拉马努金的书,超出了他从其他方面得知的拉马努金。该书使心理学家阿西斯·南蒂决心以拉马努金作为自己著书的主要对象、想像力从哈代的笔下喷涌而出,使拉马努金为数学世界所接受。

从1916年开始,哈代就向马德拉斯大学当局报告拉马努金在英国的工作;一看这个报告,他们就要求准备发表。哈代在报告中讲到拉马努金所掌握的那些“奇特而又有趣的公式”,讲到他具有的“以其独特的方式不逊于任何在世的数学家的力量”,讲到他的天赋“与正统学校训练出来的欧洲数学家如此不同”,而他的工作展现了“令人惊讶的个性与力量”;又讲到因为有了拉马努金,“印度现在已经有了一位第一流的纯粹数学家”。这些话语使数学家们很难置之不顾,不论是印度的还是英国的数学家,他们都习惯了刊物上通常使用的那种平淡无味的散文。有人曾说,哈代“可能成为一个广告天才或公关人员”,这就是一个证据。

哈代关于拉马努金的长篇悼文首次于1921年发表在《伦敦数学会会刊》上;稍后又发表在《皇家学会会刊》上;再于1927年发表在拉马努金《论文集》中。他在悼文中满怀激情

地讲了拉马努金的故事。他的语言长留在人们的记忆中。他的结论说：“[拉马努金的工作之]谁也不能否认的天赋，在于其深刻与无法征服的独创性。”

如果他在年轻时就被发现并稍加培训，他可能会成为一个更伟大的数学家；他会揭示更多的新东西，而且无疑也是更重要的东西。不过另一方面，这一来他就可能不再那么是拉马努金了，而是更多地像一个欧洲教授，然而这可能是失大于得。

斯诺是 1931 年第一次见到哈代的，他说尽管哈代为人比较腼腆，沉默寡言，“但讲到他如何发现拉马努金时，他总是留不住一点秘密”。卡特赖特回忆道：“对于发现拉马努金，哈代极为骄傲，当然这是正当的。”拉马努金丰富了他的一生，他不肯忘记拉马努金，而他也没有忘记。

1936 年 2 月 19 日，哈代从剑桥写信给 S·钱德拉塞卡说“今夏，我要做一些演讲，(在此地以及在哈佛)讲拉马努金”。这些演讲就成了后来的《拉马努金：关于他的生活和工作的十二次演讲》(Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work)一书的基础，一位评论者评论此书是“爱之作”。

在哈佛的演讲是这个伟大的大学 300 周年校庆活动的一部分。高潮是 3 天盛大的 300 年日，于 9 月 16 日至 18 日在哈佛广场举行。现在这是一座宏大的露天剧场，有 17 000 个座位；当时，会场浮动着丝绸礼帽、深红旗帜和五颜六色的学院服装。第二天晚 9 时，超过 50 万人排列在查尔斯河两岸观看长达 2 小时的焰火。

第二天上午，下着细雨，天色阴沉，彤云密布(这是沿着大西洋海岸北上的飓风的锋面)，62 位世界最出色的生物学家、化学家、人类学家和其他学者前来接受荣誉学位。他们排成

一列从威登纳图书馆前走到搭在广场北端纪念堂大柱前的看台上就位。其中有精神分析学家荣格(Carl Jung),儿童发展的先驱学者皮亚杰(Jean Piaget),英国天体物理学家爱丁顿爵士(Sir Arthur Eddington),还有哈代。颂扬哈代的建树的褒词放在一个红皮册内,上面盖着哈佛的校印,称他是“领导数学进到前人未能达到的高峰的英国数学家”。

在哈佛期间,哈代被安置在一位后来成了美国参议员的著名律师家中。有一个说法,说他和他的主人都有点不知所措:到底谈些什么呢?“律师对讨论了函数的兴趣和数学家评论谢莱(Shelley)案件的兴趣一样,都不会太大。”所以他们抓住了一个共同热心的话题——棒球。红袜队(Red Sox)就在这个城里,而哈代在芬威(Fenway)时常去看这个队的比赛。

在大结局前几周,举行了300周年艺术与科学会议,邀请了2500位以上的学者到哈佛参加论题广泛的学术演讲,如“权威的地位和作用”,又如“物理化学在生物学中的应用”。爱因斯坦因妻子生病没有来、不确定原理的发现者海森伯(Werner Heisenberg)也没有来,因为他在最后几分钟得到通知要去希特勒军队中服役8周。尽管他们缺席,这仍然是一个庄严的队伍,其中诺贝尔奖获得者不少于11人。伦敦《泰晤士报》发这条消息的标题是:“大学者们在哈佛”。《纽约时报》还报道了一些公开演讲,包括哈代的演讲在内。

会议第一天大约晚上9点,60岁的哈代——形容枯槁,满头灰发——在新讲堂的听众们面前站起。“在这些演讲中,我给自己找了一个任务,它是真正困难的任务,”他用他的演讲和再三推敲过的散文所特有的节奏对听众们说:

如果我想为自己没能完成任务作辩解,我就会把它说成是无法完成的。我必须先在自己心目中形成一种估计,这一点我以前还没有做过,然后再帮助您们形成这个估

计，这就是对现代数学史上一位最有传奇色彩的人物作出某种合乎理性的估计；这个人的生涯充满了悖论与矛盾，他不符合我们在互相估计时所习惯的几乎所有的典则。关于他，只有一种判断是我们大家都可能同意的：他在某种意义上是一个很伟大的数学家。

这时，在哈代心目中，四分之一世纪前从印度寄来一个装满了数学公式的信封的情景还栩栩如生，哈代开始讲起他的朋友：拉马努金。

## 注 释 \*

为便于读者探索，在此我对绝大多数引文和陈述的事件提供了出处。

对于已有大量文献的历史事实，如第一次世界大战，我通常不作引证。有关南印度的城市和地区的人口、地理、气候、庙宇、农业、识字率等等的统计，主要引自一些标准的地名录。其中有一些在拉马努金生前就出版了，有一些则是后来才出版的。如《帝国地名录》(Imperial Gazetteer, 马德拉斯邦 1908 年出版)，以及一些分区的地名录。

对于书中的许多次要人物，我并未如通常那样引用《国家传记字典》(Dictionary of National Biography)，或引用已发表的一系列皇家学会会员生平传记；亦未引用类似的标准传记参考文献。

关于未发表的信件，我力求注明在哪个学院或哪个机构的档案中可以找到它们，或者注明提供者。

凡引用哈代的《论文集》(Collected Papers)，若无特殊声明均指其第七卷。凡引用 P. K. Srinivasan 者，若无另外声明均指《拉马努金纪念集》(Ramanujan Memorial Number)之第一卷。

\* 为了便于查阅有关原始文献，注释中的人名、书名均按原文照录，而未译为中文。几个人访谈均写为“访谈，某人”的形式。又，文献中时有 *Transcript* 一词，意为“副本”，还有 *Memo* 词义是“备忘录”，但原书未加解释，均照录。又，注释条款中，凡楷体字为正文原句，宋体字则为书中相关内容。——译者

凡引用 Ragami(T.V.Rangaswami 之笔名)时,均未注明页数,源自他用泰米尔文写的《数学天才拉马努金》(Ramanujan, the Mathematical Cenius),巴尔的摩的 V·安南塔拉曼(V.Anantharaman)和他的妻子马利尼(Malini)助我作了非正式的翻译。Reading 是指内维尔(E.H.Neville)关于拉马努金的广播稿,现存英国雷丁大学(University of Reading)。

家庭记录(Family Record)中许多材料是含糊的,我只是在当时环境和情节看来很清楚时才引用它。

除书面材料和个人访谈外,还补充了英国和印度许多人的个人观察和非正式交谈。

## 引　　言

- 1页 “了不起的贵国同胞拉马努金”:S.R.Ranganathan,80~81。
- 9页 “近乎宗教的东西”:Oxford Magazine,2 January 1948。
- “表达神的旨意”:S.R.Ranganathan,88。

## 第　一　章

- 13页 1887年9月:家庭记录。  
人人遵行的:Slater, *Southern India*, 121。  
“湿头”:*Coinbatore District Gazetteer*, 1966。  
特普苦兰街:访谈,T.V.Rangaswami。
- 14页 天花事件:家庭记录;Ragami;P.K.Srinivasan。麻果杉树也称  
*neem*。  
这些统计数字:家庭记录中关于出生和死亡的记载。
- 15页 长疖子发痒:家庭记录。  
极少讲话:Ragami。  
一种祭祀活动:Ragami。
- 16页 总是反抗:家庭记录。  
常常提些问题:Seshu Iyer,81。  
压得粉碎:家庭记录。

- 一直转学；家庭记录。
- 抱臂而坐：Ragami。
- 贷款纠纷：访谈，T.V. Rangaswami。
- 和外公外婆同住：家庭记录。
- 找警察把他捉回学校去：家庭记录。
- 1895 年中回到贡伯戈纳姆：家庭记录。
- 17 页 房子的正中央多半有个天井：Padfield, 14; Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 18 页 玛哈玛汗节：T. R. Rajagopalan, 34; Hemingway, *Tanjore District Gazetteer* 中说 1897 年是个吉庆年。
- 香客约有 75 万人之多：Slater, *Southern India*, 117。
- 水面升高了好几英寸：Urwick, 68。
- 72 个病床：*Imperial Gazetteer*, Madras Presidency, 1908。
- 19 页 种稻：访谈，J. M. Victor。见 Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 没有吃草的地方：Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 300 多个小村落：*Imperial Gazetteer*, Madras Presidency。
- 20 页 贡伯戈纳姆的莎丽和丝绸：在贡伯戈纳姆的访谈，特别是创立学校的校长 R·维斯瓦纳坦 (R. Viswanathan) 以及布商们的访谈。
- 织机有 2000 多台：*Imperial Gazetteer*, Madras, 1908。
- 每件可以卖到 100 卢比：Hemingway。
- 好些穷人家一年的收入也不过这么多：例如，Compton, 164 ~ 165，估计一个无专长的工人每日工资为 5 安那 (16 安那 = 1 卢比)。Fuller, 63，说雇用一个农田工人每天约 2 ~ 3 便士，1 英国便士相当于 1 印度安那。一份比较新近的印度地方公报回顾说，在 1901 ~ 1912 年间，典型的农业工资为每个月 3 卢比 8 安那。1908 年的 *Imperial Gazetteer* 也说，雇用无专长的工人的典型平均工资为每天 3 安那 (有专长的工人则为每天 8 安那)。所以，若每年有 300 个工作日，每天收入 4 安那，就得到代表性的年收入 75 卢比。
- 通常是男家去选购的：Slater, *Southern India*, 119。
- 伙计的一生：基于贡伯戈纳姆的多次访谈。

- 斯里尼瓦萨对评论织物的品质很在行:K. R. Rajagopalan, 4.
- 21页 印度父亲的责任:见 Carstairs, 67 ~ 69.  
“从不开口”: Bharathi, 51  
“毫无分量”: Nandy, 102.  
只谈到房子要修理:P. K. Srinivasan, 170.  
拉马努金给他母亲的信:同上, 168.  
老虎吃羊:访谈, M. Virnasan, 贡帕戈纳姆。佳娜琪说拉马努金和他的母亲玩“15点游戏”, 也叫老虎吃羊, 见 P. K. Srinivasan, 171。一部近期的塞勒姆区地名录谈到一种称为 *Pullikatlain* 的游戏, 可能也就是老虎吃羊。  
“工于心计且有教养的太太”: Seshu Iyer, 81 关于拉马努金的母亲和她的家庭材料来自港务信托处档案中的有关记载以及与 S. Sankara Narayanan, K. Bhanumurthy, Janaki 及其他人的访谈。
- 22页 开了一间小事务所:访谈, T. V. Rangaswami.  
亲自喂他酸奶:这个场面主要来自于 K. Bhanumurthy 的访谈。  
直奔校长室去抱怨:P. K. Srinivasan, 85.
- 23页 “极有天赋的女士”:同上, 114
- 24页 种姓制度:见 Thurston; Mayo; Bhattacharaya; Fuller; Padfield ; Compton; M. N. Srinivas.  
才会得到神的恩赐:例如见 Chopra et al.
- 25页 停在路旁吃自己带的干粮:Fuller, 147; 访谈: A. Saranathan.  
印度教的饮食规矩:Fuller, 147 和多次访谈。
- 26页 免得让他以为是血:访谈, 贡伯戈纳姆的 A. Saranathan。“我如果见到肉, 我就开始呕吐。”  
“当孩童学会……”:Carstairs, 67.  
对日常生活细节的一丝不苟:见 Carstairs, 80  
奉行苦行主义和神秘主义……”:见 Singer, 8.  
“生活简单而思想高雅”:访谈, T. S. Bhanumurthy.
- 28页 马德拉斯大学 650 位毕业生中:引自 M. N. Srinivas, 102.  
“这是律师和文法学者创造的语言”:引自 Slater, *Southern India*, 132.

- 29 页 和北印度的语言不同:G. Ramakrishna et al., 459。  
夸称有一种诗体和古希腊的诗很相似:Slater, *Southern India*, 136.  
约有 2000 万:Thurston, 122.  
百分之十一的泰米尔男性婆罗门会英文:引自 M. N. Srinivas, 179.  
关于市立中学:访谈,R. Viswanathan, 现任校长;亦见 *Centenary Celebration Souvenir* 中“History of Our School”一文。  
30 页 又爱在教室间走来走去:R. Kandaswamy Moopanar 写的“*My Reminiscences*”,收在 *Centenary Celebration Souvenir* 中。  
找他帮忙解数学问题了:S. R. Ranganathan, 61.  
“0 除 0 是不是也等于 1”:S. R. Ranganathan, 105.  
房客:P. K. Srinivasan, 84.  
31 页 龙氏三角学:S. R. Ranganathan, 105。按 Richard Askey 的说法,很可能是指这部两卷本教科书的第一卷。  
从一位年纪大一点的同学:Madras Port Trust.  
他对三角函数的理解:Seshu Iyer, 82.  
小数点后很多位:同上。  
只要一半的时间:同上。  
他一看完题目就解出来了:P. K. Srinivasan, 84.  
拉马努金做了伽纳帕第·苏比尔的工作:P. K. Srinivasan, 104。  
现任校长 R. Viswanathan 说全校学生约 1000 人;P. K. Srinivasan 说有 1500。  
32 页 应该得到比满分还高的评分:P. K. Srinivasan, 121。  
关于萨兰伽帕尼寺:见 T. R. Rajagopalan, 36; G. Ramakrishna et al., 258; Das, 135; Balasubrahmanyam, 196。  
33 页 由纳亚王朝建起的:Das, 137。  
34 页 有时在白天就睡着了:Ragami, *Indian Express*, 1987 年 12 月 19 日发表的“Ramanujan, ‘A Gift From Heaven’”一文。  
35 页 每年都要步行走过城东的火车站:Seshu Iyer, 82; 在寺庙中访谈 S. Govindaraja Battachariar 和 P. Vasunathan; 关于乌比利亚潘·戈伊尔庙,见 Das, 143.

- 36页 圣巾仪式:Padfield, 63。  
 月夜去纳基亚柯维尔:S. R. Ranganathan, 66。  
 神与零和无穷大之间的关系:同上, 84。  
 “十万分地虔诚”:同上, 73。  
 “真正的神秘”:同上, 88。
- 38页 供奉蚁丘神:Whitehead, 15
- 39页 “一个活生生的现实”:Hemingway,  
 “就像西敏寺和圣保罗大教堂……”:Urwick, 72。  
 拉梅斯沃勒姆:见 G. Ramakrishna et al., 383。  
 印度教诸神:见 Das; Friedhelm Hardy, “Ideology and Cultural Contexts of the Srivaishnava Temple”, in Stein, 119; 又见 Fuller,
- 40页 一位当代英国学者:Fuller, 160。  
 “村落里的神……相互融合”:Chopra et al.,  
 引向更高更深境界:Narayana Iyer 在马德拉斯的家族的一员 V. Subramanyam 给了一个很恰当的比喻:想一下一位建筑设计师的图, 它的精美的视觉语言可能代表一个杰作。不懂这种语言的人在看这些图时, 并不能看出它所体现的天才, 但是他能够领会到这张图在制作、处理和保存时, 是多么精心和值得崇敬。他可能因此而受到启发去探讨其深藏的含义;一个石雕神像也是这样。
- 41页 身不由己精神恍惚:S. R. Ranganathan, 13。  
 奇怪的谋杀案:P. K. Srinivasan, 98。  
 借她的外孙对人说话:S. R. Ranganathan, 13。

## 第二章

- 43页 前几个月得到了一本书:Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xii, 但 S. R. Ranganathan 19, 说是一位“年纪大的朋友给他的”。“这并不是一本了不起的书”:Hardy, Ramanujan, 2。  
 Tripos(数学荣誉学位考试):见第四章。  
 关于卡尔:Hardy, Ramanujan, 3; Carr, iv; 剑桥大学记录。  
 在伦敦市外的哈德利的案头上:Carr, x。
- 45页 第一页的第一个命题:同上, 33。

- 49 页 “在许多情况下……”；同上，iv。  
“他所用的方法”；Littlewood, *Miscellany*, 87。
- 50 页 “在这个为他敞开的新天地里……”；Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xii。  
政府学院：Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*; *Imperial Gazetteer*, Madras Presidency 1908; Government College Calendar for 1975~76, part B。  
如今此地有一座桥；在访谈时 T. V. Rangaswami 说，在拉马努金的时代已有一道不结实的棕榈树造的步行桥，但 Government College Calendar 在第 5 页说此桥到 1944 年才建成代替了摆渡可住 72 位学生的宿舍；Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 51 页 “由于校规，他不能不去上历史课或生理学课”；Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 292。  
“身边的事他毫不关心”；P. K. Srinivasan, 122；又见 S. R. Ranganathan, 20。  
外文的数学教本；P. K. Srinivasan, 106。  
让他在课堂上做他高兴做的事；同上, 122。  
“很妙也很有独创性”；Seshu Iyer, 82。
- 52 页 教授要他还书；P. K. Srinivasan, 122。  
耶尔的冷漠；同上, 99。  
“对校方来说……”；Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 292。  
就去见校长；P. K. Srinivasan, 85。  
每学期 32 卢比的学费；Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 53 页 1905 年 8 月初：家庭记录。  
载重和速度都减了三分之一；Hemingway, *Tanjore District Gazetteer*。
- 54 页 一共要花三个星期；Kamleshwar C. Wah, *Chandra* (University of Chicago Press, 1990), 42。  
“当你坐进三等车厢之后……”；Compton, 27。  
维沙卡帕特南；Thurston, 40; Urwick, 83; *Imperial Gazetteer*, Madras Presidency, 1908。  
说法不一的零星记载；现能找到的关于拉马努金出走的少量

- 信息来自家庭记录; Suresh Ram, 10; Seshu Iyer, 83; S. R. Ranganathan, 46, 94; K. R. Rajagopalan, 11; 访谈 P. K. Srinivasan 和 T. V. Rangaswami。
- 55 页 大概是在 9 月里: 家庭记录。  
小学考试受辱: P. K. Srinivasan, 106; Ragani  
把他记下的笔记全藏到了房顶上: Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xii。  
“是不是因为他考得不好而不肯写信”: P. K. Srinivasan, 27。
- 56 页 “被发现是羞辱感必有的方面”: Wurmser, 52。  
“照镜子时都会对自己做鬼脸”: 同上, 17。  
“躲开的念头是内在的……”: 同上, 29。  
“心理失常”: 引自 Nandy, 108。  
“心理上暂时的不健全”: Madras Port Trust; 又见 Seshu Iyer, 他说拉马努金在政府学院失败后, “过于敏感不愿求助双亲”, 故而逃往维沙卡帕特南。
- 57 页 不停地打听: S. R. Ranganathan, 77。  
帕协阿帕·马达利尔: Muthiah, 186。  
仿雅典忒修斯神庙的高柱大殿: 同上, 185。
- 58 页 抵达马德拉斯的爱格摩尔车站: 访谈, T. V. Rangaswami, 他说由从住娜琪处听说的。  
“能参加及通过……”: Fuller, 175。  
“有一半考不取”: Fuller, 176。  
住在离帕协阿帕学院几个街区的地方: S. R. Ranganathan, 73。
- 59 页 因为害痼疾: 家庭记录。  
在帕协阿帕学院的初期: 同上, 66, 73。  
三四步就算完了: S. R. Ranganathan, 65 ~ 67。  
辛加拉维鲁·马达利尔: 同上, 65。  
欣赏拉马努金的才气: 拉马努金在帕协阿帕学院的同班同学 Ramayana Ratnakara, T. Srinivasa Raghavacharya 回忆道: “关于我们教科书中的几何、代数和三角题目……他都是心算算出来的。”S. R. Ranganathan, 75。  
“胃的左上方有个小口通食道……”: Foster and Shore, 17。

- 60 页 “取一只……兔子”:同上,13。  
一只打过麻醉剂的大青蛙:S. R. Ranganathan, 68。  
“……没有消化完毕的东西”:同上, 69。  
3个钟头的考试:P. K. Srinivasan, 119。  
1906 年 12 月:此事说法不一,例如按 K. R. Rajagopalan 的说法,拉马努金参加 F.A. 考试不是 1906 年 12 月而是次年,家庭记录则说他在 1908 年参加了一次“中期考试”,但所有说法在下一点上都是一致的:拉马努金参加了一些考试,总是不及格而得不到成绩。
- 61 页 “僧多粥少的结果”:Compton, 171。  
拉马努金的帽子:P. K. Srinivasan, 117。  
附近的农民:见对于第一章 20 页的注。  
一位老太太请他吃顿午饭:S. R. Ranganathan, 22。  
一个朋友给他 dosai:P. K. Srinivasan, 96。
- 62 页 拉马努金辅导萨斯特里:同上,89。  
辅导戈文达拉贾·耶恩伽尔:S. R. Ranganathan, 62。
- 63 页 “每证明一个公式,他就发现了好些其他公式”:Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149) (1942): 292。  
一系列的手稿:就是我称之为“家庭记录”的资料。  
“很奇怪的绿色墨水”:G. N. Watson, “Ramanujan’s Note Books”, *Journal of the London Mathematical Society* 6(1931): 139。
- 65 页 “有两只猴子到果园里偷水果”:A. C. L. Wilkinson 引自“Presidential Address”, *Journal of the Indian Mathematical Society*, February 1919, 24。
- 70 页 “每个有理数都是他的朋友”:Hardy, in Ramanujan, *Collected Papers*, xxxv。
- 71 页 “很多人都望而生畏”:B. M. Wilson 的 Lecture Notes, 现存三一学院。  
萨克雷 (William Thackeray): *Madras Civil Servants* (London: Longman, Orme, Brown, and Co., 1839)。
- “在英国……是很恰当的”:引自 Chopra et al., Vol. 3..
- 72 页 “扔进冰水”:Bell, 330。

- 73页 没有走发展的老路：有一个类似的例子，就是 Bell, 416 上引用的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)讲的一段话：他一生最重要的工作就是在完全孤立的情况下完成的。  
 “无忧无虑的好日子”：Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149): 293。  
 拉马努金警告病孩的父母亲：S. R. Ranganathan, 85。  
 “始初的主和神”：P. K. Srinivasan, 92。  
 74页 萨蒂亚普里亚·拉奥：S. R. Ranganathan, 85; P. K. Srinivasan, 90,  
 “他是一个粗短强壮的人，他教学生民间的运动如‘Dandal’和  
 ‘Baski’等”：*Centenary Celebration Souvenir*。  
 零和无穷大的理论：S. R. Ranganathan, 82。  
 “拉马努金每谈起哲学问题就那么起劲”：同上, 83。  
 75页 有时他会回到……学院：同上, 61。  
 盘着双腿：同上, 62。  
 “印度人的个性中向来不缺……”：*Hindu*, 11 February, 1889。  
 76页 眼光是“空空的”：Bharathi, 51。  
 “百试不爽的印度心理治疗法”：Nandy, 109。

### 第三章

- 77页 拉马努金的婚姻：Ragami; P. K. Srinivasan; K. R. Rajagopalan,  
 17~18; Nandy; Suresh Ram; S. R. Ranganathan。访谈，Janaki, Mr.  
 and Mrs. T. U. Bhanumurthy。  
 家道曾好过一段时日：访谈，Janaki。  
 78页 她连面都不能见：佳娜琪在一次访谈时证实了这是标准的做法。  
 父亲对儿子婚姻的反应：访谈，Janaki, Mr. and Mrs. T. S. Bhanu-  
 murthy。  
 甘吉布勒姆就有一户人家来提过亲：家庭记录。  
 英国人一向尊重各地的风俗：Compton, 117。  
 迈索尔的禁令：同上, 119。  
 半年的收入：Fuller, 143。  
 向放高利贷的人借：Marvin, 102。  
 两对新人结婚：访谈，Janaki；家庭记录。

- 79页 三年内不能和他同居;家庭记录。
- 80页 水肿病;访谈,Jacek Mostwin。  
一个名叫库普斯瓦米的医生自愿免费为他动手术:P. K. Srinivasan, 100; K. R. Rajagopalan, 19;家庭记录。
- 使用麻药后的情况:Seshu Iyer, 82。
- 81页 伤口又流血:P. K. Srinivasan, 100。  
常常要靠朋友或好心人资助车票;访谈,T. V. Rangaswami。  
一周的薪水:Compton, 27, 说1904年时,三等车票价约为每英里一个法寻(farthing),即1/4便士,-便士就是一安娜;到马德拉斯一趟从贡伯戈纳姆来回里程约四百英里,就要花一百安娜,也就是6卢比。拉马努金的父亲月收入约20卢比,很明显,这一时期,拉马努金在南印度四处奔走,对于他和他的家庭,的确是一项经济负担。
- 82页 有一次,他到了朋友家:S. R. Ranganathan, 87。  
跟他以前……萨斯特里同住了一段时间:P. K. Srinivasan, 90。  
和两位贡伯戈纳姆的老朋友住在一起:S. R. Ranganathan, 69。
- 83页 纳拉辛哈正好及格:P. K. Srinivasan, 108。  
这件事后大约一天:S. R. Ranganathan, 74。  
“无可救药的失败者”:Neville, “Ramanujan”, (Nature 149): 292。
- 84页 双亲叫他结婚:S. R. Ranganathan, 24。  
“正像军队一样”:Chaudhuri, 101。  
绝不会有成就的:P. K. Srinivasan, 123。  
“他总是很友善很合群”:Ramaseshan, 4。
- 85页 “他马上打开他的笔记本”:P. K. Srinivasan, 123。  
“心灵如此单纯”:S. R. Ranganathan, 61。  
只有看木偶戏:P. K. Srinivasan, 97。  
“她是一点数学都不懂”:S. R. Ranganathan, 22。  
1910年的下半年……:S. R. Ranganathan, 23; P. K. Srinivasan, 99;  
家庭记录。
- 86页 人人都叫他“教授”:K. G. Ramanathan, 20。  
“一些非同寻常的数学结果使我很吃惊”:P. K. Srinivasan, 129。  
1906年以后没有见过面:Seshu Iyer, 83。

- 87 页 “我的身份不够”: P. K. Srinivasan, 102。  
 拉马钱德拉·拉奥: Bhargava, *Who's who in India; Who's who in Madras*, 1934。  
 与拉马钱德拉·拉奥见面: P. K. Srinivasan, 86; Ramachandra Rao; S. R. Ranganathan, 24, 74; 家庭记录; Seshu Iyer, 83; Neville, "The Late" (*Nature* 106): 66。
- 88 页 “算都没有算”: Richard Askey 提出了这个看法。
- 90 页 费马的闲暇: Bell, 59..
- 92 页 在大英帝国, 马德拉斯是第五大城市: Lewandowski, 51, 排在伦敦、加尔各答、孟买和利物浦之后。  
 马德拉斯城名的起源: Thurston, 2; Krishnaswami Nayadu, 1。  
 马德拉斯的历史: 见 Slater, *Southern India*; Urwick; Steevens; Lewandowski; Srinivasachari; Lanchester.  
 超过海拔 50 英尺: Lanchester, 90。  
 “茅屋”: Srinivasachari, 292  
 这座城市只是横向发展: Lewandowski, 46.
- 93 页 大片的耕地: Singer, 142  
 “绿色的马德拉斯……”: Steevens, 299。  
 一家婆罗门开的饭馆吃饭: Bharathi, 50
- 94 页 希奇古怪的故事: S. R. Ranganathan, 16。  
 这不就是冲了个清凉的恒河澡吗: 同上, 67。  
 公共工程计划: Srinivasachari, 298.
- 95 页 一封来自拉马斯瓦米·耶尔的信: *Journal of the Indian Mathematical Society* 11 (April 1919): 42 ~ 44  
 印度数学: 例如见 Eves, 161 ~ 183; M. S. Rangachari,  
 “印度数学传统”: *Journal of Indian Institute of Science* (Ramanujan Special Issue 1987): 3 ~ 9.
- 96 页 “珍珠和鱼目同列”: Eves, 171
- 98 页 “是拉马努金的初恋”: Bruce Berndt 给作者的信。
- 100 页 拉马努金 8 年前……碰到伯努利数时: Madras Port Trust 档案: Askey。
- 101 页 “论伯努利数的某些性质”: Ramanujan. *Collected Papers*, 1 ~ 14.

- 据统计: K. Srinivasa Rao, "Srinivasa Ramanujan: His Life and Work", in Nagarajan and Soundararajan, 4.
- 102页 “拉马努金所用的方法是如此地简捷, 如此地新颖”: Seshu Iyer, 83。  
“真不容易”: P. K. Srinivasan, 131。  
“数值作证据就足够了”: Mordell, *Nature* (1941): 645。
- 103页 “人家都叫你天才”: S. R. Ranganathan, 25。  
“用绳子打个结”: Bharathi, 50。  
用过的纸: S. R. Ranganathan, 76。  
就劝他抄个副本: S. R. Ranganathan, 第 58 页里所说的“在这段时间”是指自 1911 年早期拉马努金受到拉马钱德拉·拉奥的影响开始, 直到 1913 年他去英国为止...
- 104页 “使人永垂不朽的纸”: Bharathi, v.  
大概有一年之久: Neville, "Ramanujan", (*Nature* 149), 292。  
日渐困扰着他: S. R. Ranganathan, 第 26 页说拉马努金接受港务信托处的工作, 是由于“他不愿意再成为一个负担, 希望结束他的依赖生活。”又见 Neville, *Reading Manuscript*。  
找到一份临时工作: 家庭记录; Srinivasan 176 页中说此项工作始自 1912 年 1 月 12 日到 2 月 21 日为止, 但有理由怀疑这项说法, 可能是前一年。  
“近有办事员的职务空缺”: P. K. Srinivasan, 31。  
“此青年之数学天分极高”: 同上, 49。
- 105页 马德拉斯港: 见 Thurston; Urwick; Srinivasachari; Lanchester; *The Port of Madras: Past, Present and Future*; Gazetteers. 访谈, V. Meenakshisundaram。  
第一位有私家小汽车的人: Muthiah, 183。  
弗朗西斯·斯普林爵士: 见 *The Port of Madras: Past, Present and Future*, 8c。
- 106页 纳拉亚纳·耶尔: 与他在马德拉斯的家人的访谈。  
斯普林对他十分信赖: S. Sankara Narayanan 说“不论纳拉亚纳·耶尔说什么, 他言听计从。”  
“行动十分方便”: *Hindu*, 24 April 1896。

- 107页 1912年,她过了发育期;P. K. Srinivasan, 172;家庭记录。  
居民则为全人口的三分之一;Lewandowski, 46。  
每月租金3卢比;访谈,Janaki。
- 108页 “拿干薪”:Ramachandra Rao, 87;Bharathi, 47。  
“跑去上班”:Bharathi, 50。  
拉马努金在港务信托处的日常工作;访谈,Janaki;Neville, Reading Manuscript:“[在港务信托处]工作一年以后,拉马努金一直为自己的职务过于清闲而感到不安,他一定曾主动申请多做些事,但他的赞助者暂时不打算让他陷在日常工作中。”  
查查账,点点现金而已;访谈,T. V. Rangaswami。  
“专管领航费特别账户”;Internal memo, 11 February 1913, 现存 Madras Port Trust;拉马努金的正规工作是“账目书记”。  
搜集包装纸用来算题目;S. R. Ranganathan, 76。  
措辞严厉地问他;同上,27。
- 109页 石板夹在膝盖间;Bharathi, 48。  
“你应该降低水平”;同上。  
把拉马努金比为钻石;P. K. Srinivasan, 172。  
英国统治与印度文职人员:见 Worswick and Embree; Fuller; Compton。
- 110页 “背叛了我们的信任”;引自 Worswick and Embree, 140。  
薪水也只有英国人的三分之二;Fuller, 276。
- 111页 “柏拉图式的理想统治者”;Worswick and Embree, 142。  
“责任感很重”;Fuller, 276。  
“他们太让人敬畏,不友善”;Urwick, 55。  
“这些英国官员是无法理解的”;同上。  
英国人个个雇佣洗涤女工;Compton, 190。
- 112页 连刷衣服叠衣服都不会做了;同上,246。  
竟然弯腰给他们倒茶;同上,207。  
“黑白同化是没有的”;同上,247。  
纳拉辛哈把他介绍给……罗斯先生;家庭记录。  
米德尔马斯特的推荐;P. K. Srinivasan, 49。
- 113页 “有辩才,会争论”;Compton, 40。

- “可以通过教育而大为增进”:同上,171。
- “一个英国人……”:Fuller,179。
- “工作很勤劳,……”:Urwick,50。
- 114页 在拉马钱德拉·拉奥的怂恿之下……:家庭记录中讲到的是拉马钱德拉 1912 年 11 月 3 日给格里菲斯的一封信;又见 Neville, Reading Manuscript。
- “贵处会计室”:P. K. Srinivasan,50。
- 115页 “如果他是真正的天才”:同上,51。
- “他给我的印象是一位有脑筋的人”:同上,52。
- 116页 “我想我写信给希尔教授是对的”:1912 年 11 月 28 日,Griffith 致 Spring 的信,存于马德拉斯港务信托处。
- 拉马努金已堕入陷阱:P. K. Srinivasan,53
- 拉马努金“显然是热爱数学的人”:1912 年 12 月 7 日,Griffith 致 Hill 的信,存于马德拉斯港务信托处。
- 117页 许多人劝拉马努金写信到英国:S. R. Ranganathan,70; P. K. Srinivasan,91。
- 118页 如果要花上两个星期的时间:Compton,178。  
 他的信稿先由……修润之后:Hardy(“Obituary”,494)说拉马努金告诉他,个人介绍信是由“一位朋友”写的。S. R. Ranganathan,32 页中坚持说,“此信很大程度上是山帮助过他的长者们写的”,拉马努金可能是由于羞怯自卑而不愿写吹嘘的话。显然,拉马努金得到过帮助,但如我后面的主张,我认为他并非如有人想像的那么自卑。  
 拉马努金 1914 年 1 月 22 日给哈代的信中说,“所有给您的信,除这一封[以及另一封]外,都不是出自自我手。那是我前面提到的高级官员们写的,但是数学结果是我自己的,信也是我的手笔。”有理由相信,拉马努金想把事情分开。此外,拉马努金对于承认别人的帮助历来过于谨慎,他怕承认他的朋友的任何帮助都意味着这语言不是他“自己的”。最后,甚至这一封他承认是自己写的信也与其他信没有多大的区别。总之,我相信,任何由拉马努金签名的信都有很大一部分是他自己的。  
 贝克与霍布森的拒绝:Snow, *Apology foreword*, 33 ~ 34 页:“我

说过有两个人不值得在这个故事中提及。出于绅士风度,哈代在他关于拉马努金所说过或写过的任何东西中都没有提这件事。然而,鉴于这两位有牵涉的人久已辞世,现在是说出真相的时候了。很简单,收到拉马努金原稿的著名数学家中,哈代并不是第一人,在他之前还有两个,都是英国人,都符合最高的职业标准。”但是 Snow 没有往下讲,在 *Alternative Sciences*, 146~147 页中, Nandy 说李特尔伍德肯定了这二人就是贝克和霍布森,不过李特尔伍德把 Hobson 错拼为 Popson, 在 “Ramanujan – A Glimpse”一文 78 页中, Bollobás 纠正了这个错误。印度数学家 K. Venkatachaliengar 给 Bruce Berndt 的信中,不承认贝克也在忽视拉马努金的人之列,他惟一的根据是:贝克曾推荐过一个印度人 C. Hanumantha Rao, 而非英国人去一个印度大学任教,因此他不可能丢掉拉马努金。Venkatachaliengar 写道:“贝克是一个非常诚实的人,行为正直,……如果[他]确实犯了错误,他一定会直接[向拉马努金]认错,或者通过 Hanumantha Rao 认错。”但是这个说法不足以动摇我们相信李特尔伍德的论断。据 Bollobás(“Ramanujan – A Glimpse”, 78)说李特尔伍德“时常私下笑话未能识别出天才的那个同事的窘态”。

## 第四章

119 页 “像一个三岁的孩子”: Michael Holroyd, *Strachey: A Critical Biography*, Vol. 1, *The Unknown Years* (London: Heinemann, 1967), 516 脚注。

不肯卖啤酒给他: Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 120。

他的宿舍里根本没有镜子: Snow, *Apology* foreword, 16; 又见 Alexanderson, 65。

“印第安人的棕色”: Snow, *Apology* foreword, 9。

120 页 哈代一共写了 6 页纸申述他的反对意见: 1910 年 11 月 9 日 Hardy 致 Jackson 的信, 存三一学院。

他的热忱、乖戾和怪癖: Titchmarsh, 452。

“快要比赛了”: Collins, 27。

人家都以为他是指: M. H. A. Newman, BBC 讯告, 存三一学院。

- 121页 他死后也告诉他板球消息;Snow, *Apology* foreword, 58。  
教堂打钟的事:同上,20。  
“我这一生最好的时光”;Snow, *Apology* foreword, 21。  
不喜欢跟人握手:访谈,Mary Cartwright。  
“最奇怪也最吸引人的家伙”;Woolf, *Sowing*, 123。
- 122页 “我献身数学”;Hardy, *Collected Papers*, 532。  
“一生中的一大乐事”:Hardy致Thomson 1919年12月信,存剑桥大学。  
他竟然承认赞同上帝的那一队讲得好:访谈,Mary Cartwright。  
“想弄清楚他的真意却不容易”;Titchmarsh, 450。  
“彬彬有礼却又不装腔作势”;Snow, *Apology* foreword, 16。  
“吃惊的小鹿”;Woolf, *Sowing*, 124。
- 123页 “才有这种坐姿”;Alexanderson, 64。  
“可以将人们的才智”:A. Ostrowski, in *Experientia* 5(1949); 131 ~ 132。
- 124页 中产阶级学校;*Cranleigh School Magazine*, July 1887, 133, 198;  
又见Megahey。  
“有时雇工的子弟”;Megahey, 12。  
55个是商人子弟;Minutes, Cranleigh School, 29 January 1880。  
艾萨克·哈代;*Surrey Advertiser and County Times*, 7 September 1901; *The Cranleighan*, 1901, 267 ~ 271; *Surrey County School Register*, 1872, 1;以及Cranleigh School的其他记录。  
每年又加他50镑薪水;Minutes, Surrey County School, 23 October 1874。  
富有的大工业家;Brandon, 97。
- 125页 关于哈代的双亲世系:由Glasgow的Robert A. Rankin提供材料。  
“稍微有点江湖气”;Snow, *Variety of Men*, 204。  
还教两堂唱歌;*Surrey County School Register*, Christmas 1872。  
都非常悲哀;*Surrey Advertiser and County Times*, 7 September 1901。  
“他是一位难得遇见的老好人”;The *Cranleighan*, 1901, 270。  
关于哈代的母亲:由Glasgow的Robert A. Rankin提供材料,由

- D. H. J. Zebedee 转述, *Lincoln Diocesan Training College*, 1862 ~ 1962.
- 去教堂两三次;访谈,Mary Cartwright.
- 126页 她教钢琴:Minutes, Cranleigh School, 29 January 1890。
- 韩德尔音乐会:*Cranleigh School Magazine*, July 1878。
- 关于格特鲁德·哈代:材料散见于 *St. Catherine's School Magazine*, 前后共 30 多年。
- “有位姑娘我……”:Gertrude Hardy, “Lines Written Under Provocation”, *St. Catherine's School Magazine* (October 1933), 575。
- 127页 他们“似乎有点过分”;Snow, *Apology* foreword, 14。
- 都是“好”书:Titchmarsh, 447。
- 就能写百万以上的数;同上。
- 关于克拉克先生:*Cranleighan*, June 1905, 18; *Cranleighan*, 1937, 120。
- 故意答错:Snow, *Apology* foreword, 14。
- 128页 “脸薄得像一层皮都没有”;同上,15。
- “那么羞答答的”:*St. Catherine's School Magazine*, 變告, August 1963, 第 6 页说“她是一位出众的教师,她对好学生极为关心。同时我也有理由相信,她对较迟钝的学生又十分耐心,两者结合。她责备人很严厉,但总是有道理的,她的公正心给年轻人以极有价值的安全感。”
- “我是十分的羞怯”:*St. Catherine's School Magazine*, October 1938, 229。
- 牧师和风筝:Stanislaw Ulam, *Adventures of a Mathematician* (New York: Scribners, 1976), 60。
- 格特鲁德信“默罕默德”:1983 年 11 月 24 日 Marjorie Dibden 致 Robert A. Rankin 的信。Robert Rankin 提供。
- 从小就失去一只眼睛:访谈,Mary Cartwright.
- 129页 由哈代夫妇……管理:School Minutes, 29 January 1880。
- 至少从 1881 年起,人口普查记录,得自 Guildford Library 之调查记录, RG 792 97b Schedule 153。哈代登记为“Godfred”。记录清楚地把哈代的房子记录为“Mt. Pleasant”(乐山居),这座小楼

现在还在,然而学校记录说有 24 个男孩“住在哈代先生家中”,这只能是指一栋更大的房子。可以想到哈代夫妇和儿女们是住在预备学校,而办公室则在乐山居的小楼里。

这种屋顶在萨里便很流行:Nairn and Pevsner, 14; 又见 Jekyll, 4。起居室和厨房,参观房屋;感谢现在的住户,可惜未记下他们的姓名。

帮助哈代夫妇管理预备部: *Sketch of the History of the Surrey County School*, 17。

一共 8 个人挤在这栋小房子里:调查记录提到的仆人们不大可能是照顾哈代一家的。Megahey, 第 16 页说一个年收入 500 英镑的中上层阶级家只能雇佣 3 个仆人,艾萨克·哈代的收入还不到此数的 1/5。

校长每年薪金大概 1000 镑:Megahey, 16,

副校长只有 100 镑:同上,17。

130 页 “受过标准的维多利亚时代……”;Titchmarsh, 447。

只是泥灰土路:Megahey, 20,

“克兰利的学生可以四处跑来跑去”;同上,27。

“开明,有教养,文化气息很浓”:Snow, *Apology* foreword, 14。

131 页 一位六年级的同学是 20 岁:Megahey, 31。

到六年级时才 12 岁:Megahey, 52。哈代十岁进三年级。

沃德先生对哈代的评价: *Cranleigh School Register, Report to the Council of the Surrey County School*, 26 July 1889。

有 137 个孩子去考:Sabben-Clare, 54。

哈代考第一名:Megahey, 52。

不像早年那么自由:同上,44。

“康内尔”: *Register of Winchester School*, Robert Rankin 提供。

温切斯特学校原本:Dunning and Sheard, 48。

132 页 “绅士似的叛逆者,智慧的改革者”:Bishop, 18。

建筑细节: *Winchester College: A Guide*, school Publication, rev. and repr. May 1984.

“行话”:例如见 Sabben-Clare, 144; Bishop, 26; *Winchester College Notions*, “by Three Beetles” (Winchester: P. & G. Wells, 1904)。

- 133 页 打了 30 棍; Sabben-Clare, 44。  
 “清晨山顶祷告”; 同上, 151。  
 绕修道院游行一周; 同上, 152。  
 “狄克太太”; 同上, 45。  
 板球: 克兰利的 John and Emma Leigh 向我担保, 当一个外国人充分了解下面这些话时, 他就掌握了板球的要旨:  
 You have two sides. One out in the field and one in.  
 Each man that's in the side that's in goes out and when he's out he comes in and the next man goes in until he's out.  
 When they are all out the side that's out comes in and the side that's been in goes out and tries to get those coming in out.  
 Sometimes you get men still in and not out.  
 When both sides have been in and out including the not outs  
 That's the end of the game.  
 (with acknowledgments to the Marylebone Cricket Club)
- 134 页 去看当时最红的名将; Snow, “The Mathematician”, 67。  
 练习是决不缺席的; Megahey, 27。  
 “球队越来越厉害”: Cranleigh School Magazine, October 1888, 251。
- 135 页 “个人的艺术和技巧”; Neville Cardus, *Play Resumed with Cardus* (London Souvenir Press, 1979), 14。  
 职业板球队常用的术语: Records of Magpie & Stump, 第 966 次会议, 3 June 1910。剑桥大学。  
 用拐杖和网球; Woolf, *Sowing*, 124。  
 “一场打不完的板球”; Wykehamist, 20 June 1893。  
 “个儿太小, 又紧张”; C. J. Hamson, 在 Senior Combination Room 的讲演, 24 November 1985, 刊登在 Trinity Review, 1986, 23。  
 关于哈代作为一个运动员的评论; Wykehamist, December 1895。  
 他一直抱怨; Snow, *Apology* foreword, 48..
- 135 页 艺术才能完全给糟蹋掉了; Titchmarsh, 447。  
 他几乎病死; Snow, *Apology* foreword, 17..  
 哈代和羊肉; Titchmarsh, 452; Bollobás, 120.

- 从来没有再回过这所学校：*Wykehamist*, 18 February 1948。  
一星期 26 节课；Bishop, 32, 是 1900 年的课时。  
理查森：Sabben-Clare, 62。  
邓肯数学奖：Winchester School 记录。  
自修物理：*The Wykehamist*, 18 February 1948..  
对侦探故事爱不释手：访谈，Mary Cartwright, 哈代告诉她说，他曾在一周之内读了 36 本。（他的妹妹也有同好：*St. Catherine's School Magazine*, August 1963, 6）。  
他 15 岁时有一天：Hardy, *Apology*, 145.  
137 页 “赫伯特又回到三一学院”：Alan St. Aubyn 的著作 *A Fellow of Trinity* (London: Chatts and Windus, 1892), 261。  
“这家伙真不错”：Hardy, *Apology*, 146。  
威克厄姆人到剑桥和牛津去：*Wykehamist*, December 1896。  
138 页 “恭祝……两位的成功”：*Wykehamist*, December 1895。  
一年一度的讲演日：*Surrey Advertiser*, 1 August 1896。  
74% 出身于这两个学校：Ellis, 144。  
140 页 分给哈代的房间：三一学院记录。  
141 页 关于 Tripos：见 A. R. Forsyth 著“Old Tripos Days at Cambridge”，*Mathematical Gazette* 19 (1935): 162 ~ 179; Leonard Roth 著“Old Cambridge Days”，*American Mathematical Monthly* 78 (1971): 223 ~ 226(二文均重印于 Campbell and Higgins, vol. 1, 81 ~ 103); Rouse Ball; Littlewood, *Miscellany*, 及“Mathematical Life and Teaching”；Hardy, *Collected Papers*, 527 ~ 553。  
“是全世界最难的考试”：Roth, in Campbell and Higgins, 97。  
142 页 最早的 Tripos: Rouse Ball, 11。  
“来祝贺他们的荣誉分享他们的欢乐”：引自 *Oxford English Dictionary*, “Wrangler”条目。  
木汤匙：Cambridge Folk Museum 展览。  
143 页 “全美球队的队员”：Campbell and Higgins, vol. 1, 81。  
144 页 “是您，先生”：Roth, in Campbell and Higgins, 98。  
1881 年 Tripos 成绩：Littlewood, “Mathematical Life and Teaching”，

- 典型的 Tripos 试题;例如见 Forsyth, in Campbell and Higgins, 86 ~ 89; Roth, in Campbell and Higgins, 97 ~ 98; Thomson, 56 ~ 60; Littlewood, *Miscellany*, 72 ~ 75。
- 他马上悟到有暗藏的机关:未来的 Senior Wrangler 是 Littlewood,他在 *Miscellany* 第 74 页中谈到此事。
- 培训律师的最好手段:Thomson, 58。
- 他们像驯马一样:几乎每个写到辅导制度的人都用了这个比喻。
- 145 页 培养出 20 多位优等第一:Forsyth, in Campbell and Higgins, 86。  
“轻描淡写的批评根本无济于事”:Forsyth, in Campbell and Higgins, 84。
- 他被交到一位韦布先生的手里:Titchmarsh, 448。
- 146 页 “数学好像是捉迷藏”:引自 R. Clark 的 *Life of Bertrand Russell*, 43。  
“不会太影响他的生涯”:Hardy, *Collected Papers*, 537。  
“也从来没有怀疑过长辈们所做的判断”:Hardy, *Apology*, 144。
- 147 页 哈代年轻时关心英国历史:Titchmarsh, 447。  
哈代的论文深受考试官的注意:Littlewood, “Reminiscences”, 12。  
费伦校长先生那时……大事:Titchmarsh, 448。  
洛夫的建议:Hardy, *Apology*, 147。
- 148 页 “能接触到真正的数学”:Hardy, *Collected Papers*, 722。  
分成两个区域:同上, 723。  
“这本了不起的书”:Hardy, *Apology*, 147。
- 149 页 “反叛成性的哈代”:Young, 270, 引 Littlewood 语。  
“花那么多工夫而什么都不去学”:Hardy, *Collected Papers*, 530。  
“这是个很大的胜利”:1898 年 6 月 14 日 G. M. Trevelyan 致哈代的信,存三一学院。  
“他也要赢”:Snow, *Apology* foreword, 24。  
莎士比亚学会的会议:Minutes, 23 May 1901。
- 150 页 哈代在克兰利:*Surrey Advertiser and County Times*, 7 September 1901。
- 151 页 “不可挽回的最后阶段”:三一学院关于俱乐部与公社的记录。

- 关于使徒社：见 Deacon; Levy; Woolf, *Sowing*。
- “一位极好的科学家”：Deacon, 33。
- 哈代之入社：Levy, 195。
- “像猎犬一般地穷追不舍”：Woolf, *Sowing*, 148。
- 152页 “对真理……的特殊感情”：Woolf, *Beginning Again*, 24。
- “年轻人能接受年老吗”：Levy, 196。
- “思辨有绝对的自由”：引自 Deacon, 70。
- “除了那些……人以外”：引自 Deacon, 59。
- G. L. 迪金森：见 Furbank, 59。
- 153页 这位经济学家曾经对哈代说：Snow, *Apology* foreword, 31。
- “惠特曼式的同志之情”：Levy, 227。
- “高层次的男色”：Deacon, 55。
- “连那些平时拈花惹草的家伙”：Deacon, 62。
- R. K. 盖伊：Woolf, *Sowing*, 124；剑桥大学记录。
- 154页 “从来没有看见他们分开过”：同上, 124。
- “某某年轻人……”的谣言：访谈，Mary Cartwright。
- “又一位英国的同性恋知识分子和无神论者”：Hodges, 117。
- “他所钟爱的洛玛斯”：Snow, “The Mathematician”, 72；Deacon, 73，说有一次哈代曾试图自杀，“第一次是在一位亲密的男朋友死后”。
- “无实绩的同性恋者”：访谈，Béla Bollobás。
- 关于“自虐”的评论：Levy, 207。
- 155页 “在校男生的热情和亲密”：Ellis and Symonds, 39。
- “仿佛维多利亚时代……”：Hynes, 185。
- 156页 “可是对他身边几个朋友……”：Himmelfarb, 42。
- 生了一个孩子：见第五章。
- 157页 “他的高等数学”：Minutes, Shakespeare Society, 16 February 1903。  
26%没有结婚：Ellis, 152；Ellis写道：“对追求智慧奉献的热情似乎伴以对生活通常关系缺少热情，而过分羞怯又实际上表露出了脆弱的感情冲动。”
- 克兰利的教师几乎全是男的：Megahey, 38~39。
- 温切斯特是这样：Bishop, 第28页写道：“英国寄宿学校把女人

- 和家庭看作潜在的麻烦，在历史上它并不是唯一这样的制度：曾经有人论证过，基本上每一个对社会提供直接服务的机构全都防范着女性的威胁。有如古代斯巴达，土耳其的 *janissary* 军团和中国社会，英国寄宿学校都暗中承认‘女人不可能把对任意外界人物的爱置于她们所爱的人的利益之上’。”John Pringle 在“The British Commune”, *Encounter*, London, February 1961 中引用此语。
- “单身汉的社会”：引自 Fowler and Fowler, 233.
- 158 页 “您到格顿去吧”：照片，Cambridge Folk Museum.
- “刚刚学造句了”：Barham, 17.
- 选这些女佣时要相貌平凡：同上, 1
- “直到结成圆满的婚姻”：引自 Deacon, 58.
- 159 页 “禁欲论被采纳了”：Ellis and Symonds, 40.
- “他一生前后曾有”：Snow, *Apology* foreword, 26.
- 160 页 “人生交往有很多关系是令人痛苦的”：Buxton and Williams, 117.
- 想把本来要去德国的美国人拉过来：*Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 19 (December 1983) : 495 脚注。
- 每星期上 6 小时课：Titchmarsh, 448.
- 161 页 “但很少是重要的”：Hardy, *Apology*, 147.
- 哈代……F.R.S.：Royal Society 记录..
- 162 页 与孟德尔相矛盾的论文：*Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 1: 165
- 哈代的回答：Hardy, *Collected Papers*, 477. 哈代—魏因贝格定律，见 Victor Cassidy, *Thinkers of the Twentieth Century* 中 Hardy 条目。
- 163 页 “解放宣言”：Himmelfarb, 35.
- “我从来没有做过‘有用’的工作”：Hardy, *Apology*, 150.
- “哈代主义”：Davis and Hersh, 87.
- “‘真’数学家的‘真’数学”：Hardy, *Apology*, 119
- “即它们与实际不符”：同上, 135.
- 164 页 “好似风和日暖的下午”：Hynes, 4

- “最大灾难”: Campbell and Higgins, vol. 1, 96。
- 165 页 “大赌气”: 同上。
- “但却不知道为什么”: R. Clark, 43。
- 166 页 “奇鸡”: Hardy, *Collected Papers*, 第 829 页的编者注。  
“认为那是挑剔细节而不务正业”: Littlewood, “Mathematical Life and Teaching”, 15。  
“在它自己的局限之下不能自拔”: Campbell and Higgins, vol. 1, 85。
- 167 页 “我们从来不看的”: Bell, 433。  
“给剑桥带来极大的启示”: E. H. Neville, 为 Andrew Russell Forsyth 所写的讣文; *Journal of the London Mathematical Society* 17 (1942), 245。  
“福塞思对  $\delta$  和  $\epsilon$  掌握得不太好”: 引自 Campbell and Higgins, vol. 1, 100。  
“这个世界里除了……”: Titchmarsh, 451。  
“没有人能像哈代……”: Wiener, *Ex-Prodigy*, 190。  
“不选的话你会后悔”: Barnes, 35。  
哈代把基础不够的人也引到数学中来了; 例如见 *Manchester Guardian*, 2 December 1947。
- 168 页 “只有新闻界”: Hardy, *Apology*, 150。  
“当时最好的英文作品”: Snow, “The Mathematician”, 68。  
哈代早年文风“粗俗”: Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 118。  
“都优雅, 都井井有条, 都有格调”: Snow, *Apology* foreword, 49。  
哈代为《剑桥评论》写罗素的哲学评论: “The New New Realism”, *Cambridge Magazine*, 11 and 18, May 1912。  
哈代写的悼文: 见 Hardy, 见 *The Collected Papers*。  
与人合作写论文时: 引自 Bateman and Diamond, 31; 但 Mary Cartwright 在访谈中说, 他与 Littlewood 合写的最后一篇论文, 执笔者是后者。  
“能刺激学生想像力”: Hardy, *Collected Papers*, 598。  
“这是无人能比的”: 引自 H. T. H. Piaggio, “Three Sadleirian Professors”, *The Mathematical Gazette* 15 (1931): 464。

- 不用文字他是无法思考的; Hardy, *Collected Papers*, 837。  
 写论文,是他乐趣的来源; Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 118。
- 169页 哈代评论约翰逊的书; Hardy, *Collected Papers*, 819
- 170页 “面对其他难得多的题目时”; Hardy, *Pure Mathematics*, vi。  
 “看上去也很像是一条线”; 同上, 4。
- 171页 “实在比废话好不了多少”; Arthur Berry, *The Mathematical Gazette* 5 (July 1910); 304。  
 “改良 *Tripos*”; Hardy, *Collected Papers*, 537..  
 “考试只要标准不太高”; 同上, 528..
- 172页 “一定要苦苦地爬到头等”; 同上, 537。  
 “这是英国人的方法”; H. B. Heywood, “The Reform of University Mathematics”, *The Mathematical Gazette* 12(1925); 323..  
 “我不能说我受过……”; Littlewood, *Miscellany*, 71。
- 173页 “走江湖的卖艺人”; C. J. Hamson, [无标题], *Trinity Review* (1986); 23。  
 “因为他对弱者是十分仁慈的”; 这事的另一种说法见 M. L. Cartwright, “Some Hardy-Littlewood Manuscripts”, *Bulletin of the London Mathematical Society* 13(1981), 294。  
 “真能如哈代所追述的那样”; Titchmarsh, 454。
- 174页 哈代讨论柏格森哲学; R. Clark, 169。  
 以为他还是个大学生; Wiener, *Ex-Prodigy*, 183。  
 “永恒的真理和价值观”; Woolf, *Beginning Again*, 20。  
 哈代的日常生活; Snow, *Apology* foreword, 31。

## 第五章

- 175页 贴着印度邮票; Snow, *Apology* foreword, 30。若无特殊说明, 叙述收到拉马努金信的材料均出自此书, 30~38。  
 “谨自我介绍如下”; Ramanujan, *Collected Papers*, xxiii.
- 176页 “所附的论文”: 拉马努金的信现存剑桥大学图书馆, 其中绝大部分已发表于 Ramanujan, *Collected Papers*, xxiii ~ xxv 及 349 ~ 355。
- 177页 1913年1月晚些时; Snow, *Apology* foreword, 31; 其中只说是 1

- 月,拉马努金发信日期是1月16日,邮件到达英国通常不需两周,所以极有可能在1月26日至31日到达。
- 178页 就是开一个玩笑:Snow,30~31;讲的是哈代常收到“怪人”的来稿,所以一开始拉马努金的稿子也被看成是“欺诈”。Neville,in the Reading Manuscript讲得更细。
- 179页 “一个常数或参数取特别的值”:Hardy,“Obituary”,494。
- 180页 “神童”:Littlewood, *Miscellany*,66。  
关于李特尔伍德所读的书:同上。  
“粗犷而又具有特殊魅力的人”:Bateman and Diamond,33。
- 181页 “不幸的是她太像一个圣女”:Littlewood,“Reminiscences”。  
李特尔伍德的绯闻:这个关系持续了十几年,女方即罗素的医生Dr. Streatfeild的妻子。李特尔伍德的女儿是Ann Johansson.Bollobás, *Littlewood's Miscellany*,18。访谈,Béla Bollobás,Charles Burkhill。  
“冲击深刻而困难的问题”:这是哈代的话,引自Burkhill,61。  
交由哈代审查:Littlewood, *Miscellany*,78。  
证明有毛病:Bateman and Diamond,29。  
“只有3个真正伟大的数学家”:此话在数学界流传甚广。  
不久前,……D号楼梯处:三一学院记录。
- 182页 大约在李特尔伍德的房间里见面的:Snow,33,说是在哈代房里见面的。但Bollobás,in“Ramanujan—A Glimpse”,76,文中说是在李特尔伍德房里。Mary Cartwright,Littlewood的学生和合作者,说李特尔伍德总希望别人去看他,她认为不大可能是在哈代房里。  
“似乎很难相信”:Hardy,“Obituary”,494。  
“我请您们先和我……”:哈代以后几页中引用的回信大部分引自Hardy, *Ramanujan*,7~10。
- 186页 “没有一个不奇特,不令人叹为观止”:Hardy,in *Ramanujan, Collected Papers*,xxv。  
“没有证明的定理”:Neville,“Ramanujan”(*Nature* 149),293。  
“具有举世无双的富有独创性的智者”:Hardy, *Nature*(1920):494~495。

- 将近半夜：这是 Snow 的标准说法，但是 Béla Bollobás 在访谈中强调拉马努金的公式太复杂，结果太惊人，甚至哈代和李特尔伍德一个晚上也难以作出评判，所以 Snow 的说法，尽管精神是对的，可能把几个晚上的工作说成了是一个晚上。
- 187页 “这实在是容易不过”：Mordell, “Ramanujan”, 643。  
“又一个怪物”：Bell, 314。
- 188页 “引人注目的出众的形象”：Hardy, *Collected Papers*, 751。  
有什么想像力在闪光：H. T. H. Piaggio, “Three Sadleirian Professors”, *The Mathematical Gazette* 15(1931); 463。  
“泥潭里的老树干子”：访谈，Mary Cartwright。
- 189页 除此以外就什么也没有了：能如此洞察常人对新东西自然怀有的抗拒之心的人是 Jacob Rabinow。  
“一个印度集市”：*Cranleigh School Magazine*, May 1887, 112。
- 190页 “我是属于被压制阶层的”：访谈，Mary Cartwright。  
“大椅子才坐得下的人”：Snow, *Apology* foreword, 42。  
“希望他们的对手打输”：Snow, “The Mathematician”, 70。  
“谁也不会忘记”：Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 293。
- 191页 哈代开始行动：Snow, *Apology* foreword, 34, 说是第二天，无论如何，甚至在没有回信给拉马努金时，哈代就已与印度文职人员联系了。  
“我对您的来信和定理极感兴趣”：哈代致拉马努金的信，1913年2月8日。
- 192页 2月下旬：1914年1月22日拉马努金给哈代的信。
- 193页 2月25日：Memo, Sir Francis Spring, S. R. Ranganathan, 29。  
“不必为生计发愁”：P.K. Srinivasan, 55。
- 194页 得到了哈代的认可：说瓦克尔的评价很大程度上是由于哈代的信，这种说法与通常传给我们的说法并不一致。哈代 (*Collected Papers*, 703) 说，瓦克尔“是一位极好的数学家，不会看不出[拉马努金工作的质量]，尽管这与他本人的工作几无共同之处，他提请政府注意拉马努金。”但不可避免会得到另一种结论，即瓦克尔的推荐只是哈代的信的尾流。根据之一是，在斯普林的备忘录 (Suresh Ram, 27~28)，他注意到瓦克尔“宣称

自己无能力判断拉马努金的工作，并说他认为剑桥三一学院的哈代先生是对这个工作的价值真正最有资格作判断的人，拉马努金先生已与哈代先生有信件往来，本档案中就保存了一封 1913 年 2 月 8 日的信——此信是在瓦克尔来访前的 17 天，他把瓦克尔放在斯普林和耶尔(Iyer)所掀起的马德拉斯公众对拉马努金的一片掌声后面了。

“他充满同情地看待我的工作”：1913 年 2 月 27 日拉马努金致哈代的信，此信现存剑桥大学图书馆。

因哈代的信而增强了信心：哈代致印度学生秘书的信也到了马德拉斯，见 S. R. Ranganathan, 34。

195 页 “一贯地我行我素”：Hardy, *Collected Papers*, 720.

拉马努金给哈代的第二封信：1913 年 2 月 27 日。

197 页 “仪态无懈可击，举止淳朴”：Neville, “The Late”(*Nature* 106), 662。

“他的名字将被人们记得一百年”：Transcript, *Nova* 1508, 18.

“‘谦卑’的人是做不出好工作的”：Hardy, *Apology*, 66.

“能为拉马努金做些什么”：Suresh Ram, 29.

董事会的行动：见 Suresh Ram, 28 ~ 31; S. R. Ranganathan, 30 ~ 31; K. Venkatachaliengar 致 Bruce Berndt 信，信由 Berndt 提供。

“并以激烈的言词”：K. Venkatachaliengar 致 Bruce Berndt 信。

198 页 4 月 12 日左右，拉马努金得到了好消息：Ramanujan 致马德拉斯大学教务长 1913 年 4 月 12 日信，信存马德拉斯港务信托处。

“这却是不务正业”：Neville, “Ramanujan”(*Nature* 149), 293.

它的前身叫做蒂鲁·阿里·肯尼：Krishnaswami Nayadu, 30；关于特里普利卡尔浴池和它附近的庙宇的描写是根据作者亲眼所见，以及 Das, 245。

199 页 帕拉瓦的国王……简易的铭文：Krishnaswami Nayadu, 30。  
搬到这里的：家庭记录。

交全额会费的最低收入线：*Journal of the Indian Mathematical Society* (February 1917), 19.

与纳拉亚纳·耶尔一同工作：S. R. Ranganathan, 31。

- 借几本数学书;P.K. Srinivasan, 132。
- 拉马努金在康纳马拉图书馆;S.R. Ranganathan, 31。
- 200页 送到他手上:同上,90。
- 母亲专门为他做的:访谈,Janaki。
- 一个小科学实验:访谈,Janaki; Ashis Nandy, 131, 说拉马努金“教她一点科学常识”,但是那是在拉马努金从英国回来以后,而不是去英国之前的事。
- “去做吃饭前做的事”:访谈,Janaki; Nandy 也说拉马努金把她当作秘书,但也是在从英国回来以后的时期。
- 她既不求他教,他也不想教:访谈,Janaki。
- 201页 “他的信简直是疯了”:Littlewood 致 Hardy 的信, in Ramanujan, *The Lost Notebook*, 383。
- “您那显见的数学才能”:P.K. Srinivasan, 56。
- “谨奉上我的微薄成就”:Ramanujan 致 Hardy 的信,1913 年 4 月 17 日,信存剑桥大学图书馆。
- 8 月的师生聚会:S.R. Ranganathan, 12。
- 把几个……定理递交……: *Journal of the Indian Mathematical Society* 5, no. 5; 185。
- 202页 可能是为了争取……利特尔黑尔斯:K. Venkatachaliengar 致 Bruce Berndt 信。
- 他将去读拉马努金的结果:Memo, Narayana Iyer, 1913 年 10 月 31 日,该件存于马德拉斯港务信托处。
- “拉马努金懂波兰文吗”:S.R. Ranganathan, 12。
- 季度报告:见 Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, part I, 295; 及 Berndt, “Quarterly Reports”。
- 203页 “就会找到穿过树林的新路”:Berndt, “Quarterly Reports”. 516。
- 204页 “新的,有意义的”":Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, part I, 297。
- “结果是错的”:P.K. Srinivasan, 57。
- “人间谁也不能”:Snow, *Apology* foreword , 34。
- 拉马努金……的讲法:Ramanujan 致 Hardy 的信,1914 年 1 月 22 日,信存剑桥大学图书馆。
- 205页 “他已无异于一个死人”:T. Ramakrishna,

- 206 页 “您想违反教规吗”: Gandhi, 37。  
来自全印度的未婚工人: J. Chartres Molony, *A Book of South India* (London: Methuen & Co., 1926), 引自 Lewandowski, 53。  
聚居于特里普利卡尔的帕塔莎拉蒂庙附近: Lanchester 书中的地图, 未标页码, 该图表明了马德拉斯居民的分布情况。
- 207 页 “他是另一种人”: Hardy 致 Mittag-Leffler 信, 时间大约是 1920 年, 信存 Glasgow 的 Robert Rankin 处。  
关于学院评议会大楼的建筑: Muthiah, 106; 作者亲自观察过。  
“略有怯意而又急切的人”: Neville, Reading Manuscript。
- 208 页 “他的父母已不再反对了”: Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 293。  
促成拉马努金去英国的多方影响: S. R. Ranganathan, 36。  
“他的言论就更有分量了”: Ramachandra Rao, 88。
- 209 页 “完成自己的人生使命”: Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 293。  
1913 年 12 月末: 家庭记录。  
给贡伯戈纳姆家里写了信: 家庭记录。
- 210 页 连着三个晚上: P. K. Srinivasan, 114; Bharathi, 48。
- 211 页 “我把自己锁在小阁楼里”: G. T. Rajagopal 引用此语于 *Mathematics Teacher (India)* 11A (1975), 119。  
“希望几个月内成行”: 1914 年 1 月 22 日 Ramanujan 致 Hardy 信。  
他将要走了: P. K. Srinivasan, 100。  
拉马努金的其他顾虑: 1914 年 1 月 22 日 Ramanujan 致 Hardy 的信; 及 Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 293。
- 212 页 他的岳父的关心: K. R. Rajagopalan, 33。  
母亲的担心: 同上, 32~33。  
和他握了手: K. R. Rajagopalan, 34。  
“属于马德拉斯的光荣”: Neville, Reading Manuscript。  
他们都希望他达到的顶峰地位: Neville, Reading Manuscript。  
内维尔就写信给哈代: Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 294。  
令人烦恼的回信: 1914 年 2 月 11 日 Mallet 致 Hardy 的信, 信存

- Reading 大学图书馆。
- 213 页 “急复您信”: Hardy 致 Neville 信, 存于 Reading 大学图书馆。  
“未为人知的天才”: Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 294。  
“我们时代数学界最有意义的事”: P. K. Srinivasan, 59。
- 214 页 “隐于马德拉斯”: 同上, 61。如果 Venkatachaliengar 关于董事会的叙述正确的话, 那么 Littlehailes 现在调门也变了。  
“极高的甚至超凡的天才”: 同上, 64。  
“头脑也决非最差的人”: 引自 Slater, *Southern India*, 262。
- 215 页 “全面发展其人格”: 同上, 263。  
“勋爵大人真心同情”: S. R. Ranganathan, 35。  
3 月 11 日: S. R. Ranganathan, 37。  
3 月 14 日: 访谈, Janaki, 她说“在他走前三天……”。  
现在, 他哭了: 访谈, Janaki。  
当她的婆婆在庙里时: Kalyanalakshmi Bhanumurthy, “The Man Behind the Mathematics”, *The Hindu*, 20 December 1987。  
她又如此年轻貌美: K. R. Rajagopalan, 35。
- 216 页 “按照一种召唤”: Ramachandra Rao, 88。  
骑上摩托: S. R. Ranganathan, 36。  
“严令只给他素食”: Ramachandra Rao, 88。  
这些衣服怎能穿得出去: P. K. Srinivasan, 134; S. R. Ranganathan, 62。  
简直认不出来了: K. R. Rajagopalan, 35。  
他的朋友与他聚谈通宵: S. R. Ranganathan, 71。
- 217 页 专门建了一个……趸船: *The Port of Madras: Past, Present and Future*, 8。拉马努金的朋友纳拉辛哈·耶恩伽尔的报告, 收于 S. R. Ranganathan, 第 70 页, 报告说是斯普林爵士说服了拉马努金和内维尔从马德拉斯起程, 而不是如通常那样从孟买起程。  
内瓦萨号: 详情来自英国 National Maritime Museum Information File; George Blake, *BI Centenary, 1856 ~ 1956*, (London: Collins, 1956); J. H. Isherwood, “The Notable ‘Nevasa’”, in *Sea Breezes*, new series 21 (1956): 28 ~ 31; “End of the ‘Nevasa’”, *Sea Breezes*, new series 5 (1948): 148 ~ 149; P. K. Srinivasan 著“拉马

努金的送行”,91~92。  
“以得到灵感”:Bharathi,49。

## 第六章

- 219页 饱船吃不下饭:P. K. Srinivasan, 3。  
3月19日:拉马努金去英航行的照片来自家庭记录,关于内瓦萨号的细节(见第五章);拉马努金的信见 P. K. Srinivasan; S. R. Ranganathan, 38; K. R. Rajagopalan, 36; *P & O Pocket Book* (London: Adam and Charles Black, 1908); 航海日程 *Lloyd's Weekly Shipping Index*。  
躲在自己的二等舱房里:K. R. Rajagopalan, 36。  
自己的际遇,分析自己的心理:Hardy, Ramanujan, 11。
- 220页 400卢比的票价:C. R. Vernon Gibbs (London: Putnam, 1963).  
*British Passenger Liners of the Five Oceans*, 63, 1914年由伦敦到孟买的二等舱票价为32英镑,约合480卢比。  
其中不乏正统的婆罗门:S. R. Ranganathan, 36.
- 221页 POSH: Ernest Andrew Ewart (London: L. Nicholson and Watson, 1937), *A Hundred Year History of the P&O*, 1837 ~ 1937, 112~113.  
寄了4封信回印度:家庭记录。  
邮票上是金字塔:P. K. Srinivasan, 92。  
“诚挚的感谢”:同上,3。  
内维尔去迎接拉马努金一事:Raymond Neville 致 Robert A. Rankin 的信,1982年(原文如此)5月15日。
- 222页 关于当年的伦敦:例如见 Geoffrey Marcus, 47。  
“节奏快得多”:Woolf, *Beginning Again*, 16。
- 克伦威尔路: *Report of the [Lytton] Committee on Indian Students*。
- 223页 遇见了……拉马林甘:Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 84。  
切斯特顿路:关于这条街,特别是113号的房子的信息主要来自现在的屋主 Constance Willis, 她还请我参观了这座房子;照片来自剑桥郡的收藏;其记录则由剑桥市政府的建筑管理员 J. D. Webb 提供。

两个月期间；内维尔在他献给拉马努金的 *The Farey Series of Order 1025*（剑桥：剑桥大学出版社，1950），第 xxvii 页中记为三个月，但是这与 1914 年 6 月 11 日拉马努金致克里希纳·拉奥的信（P. K. Srinivasan, 7）的说法矛盾，信中说他当时已搬到学院去住了（当时他到剑桥还不到两个月）。

- 224 页 大部分事都由哈代和内维尔办了；P. K. Srinivasan, 7。  
 用钢笔蘸着黑墨水；*Terms Book, 1899 – 1915, Trinity College*。  
 受惠于那个奇妙的春天；Marcus, 112。  
 乔治国王来访剑桥；*Cambridge Independent Press*, 1914 年 5 月 1 日。  
 李特尔伍德每周和他见一次面；P. K. Srinivasan, 154。  
 “不摆架子，乐于助人”；同上, 7。  
 贝里站在黑板前；P. K. Srinivasan, 145。
- 225 页 “而且读音都不对”；引自 K. G. Ramanathan, “Ramanujan: A Life Sketch”, *Science Age*, December 1987, 22。  
 “步履蹒跚”地穿过三一学院的庭院；B. M. Wilson, 讲演笔记，三一学院。Wilson 后来删去了“步履蹒跚”几个字，可能因为他觉得这几个字不够庄重，但原稿上还看得出这几个字。  
 “住在学院外”；P. K. Srinivasan, 7。  
 离开内维尔家；访谈，Mary Cartwright。  
 尽善尽美的主人；T. A. A. Broadbent, “Eric Harold Neville”, *Journal of the London Mathematical Society* 37(1962): 482。
- 226 页 几乎每天都可以见到哈代；Hardy, Ramanujan, 11。
- 227 页 估计有 1/3；同上, 10。  
 “一大堆未发表的材料”；Hardy, *Collected Papers*, 718。  
 “真正探索性的分析”；Hardy, “A Chapter from Ramanujan's Notebook”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 21(1923): 503。  
 波利亚；Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, part 1, 14。  
 “绝非易事”；G. N. Watson, “Ramanujan's Notebooks”, *Journal of the London Mathematical Society* 6(1931): 140。  
 花上一个月来证明；同上, 150。

- 228 页 “至少是一个雅可比”:Littlewood 给 Hardy 的信,此信写于 1913 年 3 月初,今存于三一学院。  
“欧拉或雅可比”:Hardy, *Collected Papers*, 720。
- 230 页 “他那个时代最伟大的形式主义者”:Hardy, *Ramanujan*, 14。  
“令人发狂的奇异”:Littlewood, *Miscellany*, 87。
- 231 页 “绝大部分却从未听说过”:Snow, *Apology* foreword, 36。  
“绝无对手”:Hardy, *Collected Papers*, 720。  
“我发现了怎样一个宝藏”:Hardy, *Ramanujan*, 1。  
“我非常仔细地编辑,以供发表”:Hardy, *Collected Papers*, 717。
- 232 页 都乘下午 2:15 的火车离开剑桥:Hardy, *Collected Papers*, 751。  
关于伦敦数学会的会议:学会记录。  
不超过一个氢原子的半径:Jonathan M. Borwein and Peter B. Borwein, *Scientific American*, February 1988, 112。
- 233 页 “闲暇无事时”:同上,114。
- 234 页 “新结果”:Hardy, *Collected Papers*, 494。
- 235 页 “猎狐场面壮观惊人”:Cambridge Daily News, 1914 年 4 月 18 日。  
恺撒死了:Cambridge Daily News, 1914 年 4 月 19 日。
- 236 页 “但是他很快活”:Neville, “Ramanujan”(*Nature* 149), 294。
- 237 页 “这个国家没有战争”:P. K. Srinivasan, 168。  
以便减轻回声:First Eastern General Hospital Gazette, 1915 年 7 月 6 日,135。
- 238 页 光线自天花板向下:同上,1915 年 6 月 22 日,100。  
绘有很大的红十字的救护车:同上,97。  
在去大厅的路上就可以看到伤兵们:Parry, 200。  
“我们有了一个新剑桥”:同上,95。  
未铺沥青的路面压出好几英寸深的泥泞:Keynes, 182。  
9 月 20 日:Butler, 200。  
“德国的堕落”:Parry, 96。
- 239 页 “赶在前面上阵”:Butler, 200。  
“德国人放火”:P. K. Srinivasan, 168。  
“有个题目想给你做”:S. R. Ranganathan, 81; 马哈拉诺比斯并没有引述是出自 1914 年 12 月号,但题目的内容和该期出版的

- 月份,他记得准确无误。
- 241页 “他知识的局限性”:Hardy, *Collected Papers*, 714。  
“找到一个函数能精确地表示”:Ramanujan, *Collected Papers*, 349。
- 242页 “关于素数的东西是错的”:Littlewood致Hardy的信,时间大约是1913年3月初,Ramanujan, *The Lost Notebook*, 380  
“欧几里得的定理告诉我们”:Hardy, *Apology*, 99。
- 244页 德·拉·瓦莱-普桑:卢万大学数学教授。第一次世界大战的第一个月,当图书馆被付诸一炬时,他的大部分手稿就散失了。见 *Journal of the Indian Mathematical Society* 10:27。
- 245页 “证明即寄”: *Journal of the Indian Mathematical Society* 5(1913): 50~51。  
在哪里摔倒了跟头的:见 Hardy, *Ramanujan*, 第1章和第2章。  
“没有复零点”:Hardy, *Collected Papers*, 706。  
黎曼猜想:见 Campbell and Higgins, vol. 2, 149~153, 其中的介绍很适宜外行阅读。
- 246页 黎曼猜想得到证明了吗:这是关于黎曼猜想的著名传说之一。  
“解析数论不属这样的领域”:Hardy, *Collected Papers*, 706。  
“他的成就是极不寻常的”:Littlewood, *Miscellany*, 87。  
“比他的成功更为奇特”:Hardy, *Collected Papers*, 706。  
“他的直觉误导了他”:Hardy, *Ramanujan*, 38。
- 247页 “作为高潮出现”:同上,16。  
请看这一串整数:这些例子都选自 Ivars Peterson, “A Shortage of Small Numbers”, *Science News*, 9 January 1988。  
哈代常引用的一个例子:Hardy, *Ramanujan*, 16。
- 248页 “在数学中具有确定意义的最大的数”:Hardy, *Ramanujan*, 17。  
关于 $2=1$ 的“证明”:中学课本里的经典之作。
- 249页 遇到各种各样的麻烦:这些例子是三位数学家 Clark Friedman, Richard Askey 和 Bruce Berndt 提供的。  
“全然置之不顾”:Hardy, *Collected Papers*, 706。
- 250页 “什么是一个证明”:Littlewood, *Miscellany*, 88。  
“大大减轻我的伤心”:R. Clark, 176。

- “他的思想多少有些僵化”: Hardy, *Ramanujan*, 10..
- 251页 “我已改变了发表我的结果的计划了”; P. K. Srinivasan, 15。  
“我的笔记本束缚高阁”: 同上, 21.  
“毫无减退的征兆”: Hardy, *Collected Papers*, 715.  
“一个很奇怪的函数”: P. K. Srinivasan, 23.
- 252页 “他再着手去制造一个证明”: Hardy, *Ramanujan*, 16.  
“不是首要的了”: Littlewood, *Miscellany*, 88.  
“推进数学”: Klein, in Mordell, “Ramanujan”, 647.
- 253页 非正式的评分表: Berndt, *Ramanujan's Notebooks I*, 14.  
“破坏了他的灵感魔法”: Hardy, *Collected Papers*, 715.  
“极有意思的讲座提纲”: Young, 282.
- 254页 “剑桥一片漆黑”: Parry, 98.  
“在法国和佛兰德我们毫无进展”: 同上。  
剑桥的女学生: Keynes, 62.  
“前线成了第一流的俱乐部”: Parry, 96.
- 255页 “心情愉快无所谓”: Williams, 15  
“就是李特尔伍德也不能”: Hardy, *Apology*, 140.  
“填不满李特尔伍德的工作时间”: Burkill, 63.  
公认“不宜”从军: 我不知道这个说法的根据。  
“至少有一份他的讣告”: Norbert Wiener, “Godfrey Harold Hardy”, *Bulletin of the American Mathematical Society* 55: 72 ~ 77; 这一记载后来由 Littlewood 等人致函 Bulletin 加以更正。  
“我不喜欢把良心反战者列为一类”: 1918年6月15日 Hardy 致 Jenkinson 的信。Cambridge University.  
哈代“热心写文章”: Littlewood, “Reminiscences”, 13.
- 256页 他们第一次公开聚会: Hardy, *Russell*, 12  
· 当局就把它查封了: 同上, 19.  
上涨了 32%: Marwick, 125.  
每个月写三四次: 家庭记录, 55.  
一大包英国文学书籍: P. K. Srinivasan, 162.  
多么关心这些文章发表的情况: 所引的信分别见 P. K. Srinivasan, 7, 11, 13 和 32.

- 257 页 他直接去找哈代;S. R. Ranganathan, 77。  
次年;P. K. Srinivasan, 28。  
“在马德拉斯,我的工作既无人能帮助,也没人能评审”;同上,  
29。
- 258 页 学生们有时还骂他;S. R. Ranganathan, 71。  
“不由得打了个寒战”;同上,78。  
拉马努金在茶会;同上,76。  
人多时拉马努金就缄默不语;同上,83。  
拉马努金在假期中;同上,76。  
查理的姑妈;Suresh Ram, 43。  
到了 1915 年 10 月中;三一学院记录。
- 259 页 关于高合数的大论文;见 Ramanujan, *Collected Papers*, 78 ~ 128。  
“我是早早放弃了这份苦差”;见 W. N. Bailey, 引自 George E.  
Andrews, *Q-Series*。
- 260 页 “具有初等的但极为精巧的特性”;Hardy, *Collected Papers*, 497。  
“非凡洞察力与创造性”;同上,499。  
可能是三一学院的顶尖学生中空前杰出的;Barnes, 33。
- 261 页 “完全证实了来此时人们对他的期望”;P. K. Srinivasan,  
66。  
“他是我历来认识的最出色的数学家”;Seshu Iyer and Ra-  
machandra Rao, xvii。  
斯普林写信给迪尤斯伯里;关于拉马努金是否会回印度的这  
一封信和其他的信件现存马德拉斯港务信托处。  
年收入平均为 75 英镑;Marwick, 23。  
个人所得税的起征点;同上,21。  
“简单得几近荒唐”;Hardy, *Collected Papers*, 714。
- 262 页 关于拉马努金的生活和工作;B. A. Rankin, “Ramanujan's  
Manuscripts and Notebooks, II”, 364。  
拉马努金并没有在春天回印度;除了这里讲的两点理由外,还  
有第二个理由,见第七章。  
“拉马努金是极其不幸的”;Hardy, *Collected Papers*, 491。
- 263 页 “达每日 4000 人之多”;Marwick, 133。

## 第七章

- 265页 请查特吉的晚餐:Suresh Ram, 40~42, 关于查特吉和其他客人的详情引自 *Who's Who in India*, 1937~38, 查特吉直到 1915 年末, 显然还在印度旁遮普大学, 而他的结婚是在 1916 年, 我由此推断出宴会的时间。
- 卡斯图里兰伽尔的称赞:S. R. Ranganathan, 90.
- 267页 “出自本能的尽善的仪态”: Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 294.  
和平时期原有的桌布都撤掉了: 人们在高桌子上告诉我的。
- 268页 “他在这时就不应再去谈工作了”: Littlewood, “Reminiscences”, 有一本保存多年的小书: *Trinity College Kitchens: Suggestions and Complaints*, 1909~1955, 三一学院。  
非常严格的正统素食者:S. Chandrasekhar 估计, 甚至在印度, 拉马努金一家人按设想的正统种姓尺度来衡量, 也是居于前 1/4 的, 那些去英国的旅居者, 一般地远不那么正统。
- 269页 关于婆罗门的故事: 访谈, T. M. Srinivasan.  
“是羊油炸的”: Suresh Ram, 42; 又见 S. R. Ranganathan, 78.
- 270页 一个小煤气炉: 同上, 76。  
他在小炉子上炒菜的样子: 见 Snow, *Apology* foreword, 35: “哈代常常见到他如祭祀似地穿着宽松的袍子无可奈何地在自己房间里用煎锅炒菜。”  
“我的思念难断”: Gandhi, 40  
每年约招收 20 名: 此数字是由“政府报告”推断而得。Fuller, 186, 估计全英约有 1700 名印度学生。
- 271页 “首先的难处”: Amar Kumar Singh, *Indian Students in England*.  
更晚一些时候, 一位学生: 访谈, Rajiv Krishnan, 剑桥基督学院。  
一个印度学生曾梦到自己死了: 同上。  
“他的英国朋友们保持缄默”: Neville, *Reading Manuscript*.  
“相互隔绝到了漠不关心的程度”: 引自 Barbara Tuchman, *The Proud Tower* (New York: MacMillan, 1966), 66.
- 272页 “而一点也不暗示我是失礼了”: Chaudhuri, 90.  
“难道我们已经相互介绍过了吗”: 访谈, S. Sankara Narayanan;

- Sud 在 “How to Become a Barrister and Take a Degree at Oxford or Cambridge”一书中讲过类似的故事。
- “表现出一种冷漠的神情”: Sathianadhan, 28。
- “别人对于他们都无足轻重”: Barnes, 35。
- “脸板下来了”: Young, 271。
- “谁都不会眨一眨眼”: Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 149。
- 273 页 洁白的祭祀用的新围腰布: 访谈, T. V. Rangaswami。  
老忘不了自己是外国人: 见 S. R. Ranganathan, 47。
- 274 页 “每天只洗一次澡吗”: David E. Fisher, *Fire & Ice* (New York: Harper & Row, 1990), 46; 据说是康奈尔大学一位波兰数学家在 60 年代告诉 Fisher 的。  
“极少见到他”: B. M. Wilson, 未发表的笔记, 三一学院。  
在凉爽的深夜工作: Suresh Ram, 40。  
“严重的心理后果”: *Colonial Students in Britain*, 94。  
而在英国则只有 17%: Amar Kumar Singh. *Indian Students in England*。  
三一学院周日散文俱乐部: Trinity College。  
拉马努金未参加 Majlis: Suresh Ram, 44。
- 275 页 “民族主义和激进主义”: Nandy, 125。  
“被一种中世纪式的幽暗包围着”: W. E. Heitland, *After Many Years*, 转引自 *Cambridge Commemorated*, ed. Laurence and Helen Fowler (Cambridge University Press, 1984), 283 ~ 284。
- 276 页 “需要有大能力的数学家用高超的技巧来求解”: Norbert Wiener, *Bulletin of American Mathematical Society* 55(1949): 77。
- 278 页 “稍想一下即知”: Hardy, *Lectures by Godfrey H. Hardy on the Mathematical Work of Ramanujan*, [Marshall Hall 的笔记] (Ann Arbor, Michigan, 1937), 25。  
“找不到……任何暗示”: Ramanujan, *Collected Papers*, 277。  
“不如拉马努金设想的那么近”: Hardy, *Ramanujan*, 9。
- 279 页 “思想是极为显然的”: Hardy, *Quatrième Congrès des Mathématiciens Scandinaves*, 46。
- 280 页 “扮演一个大数学家的角色”: Gian-Carlo Rota 为 *Collected Papers*

- of P. A. MacMahon 所写的 *Introduction*, ed. George Andrews, xiii。  
一般地说,每次都……胜;同上, xiv。
- 281 页 “问题就完全解决了”; Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 98。  
“很了不起的一步”; Littlewood, *Miscellany*, 89。  
“甚至可以是有界的”; Ramanujan, *Collected Papers*, 283。  
“我们进而……检验这个假设”; 同上。
- 282 页 塞尔伯格的论证; Atle Selberg, “Ramanujan and I”, *Science Age*, February 1988, 39。
- 283 页 两个人; *Hindu*, 22 December 1987。  
“不只是哈代能做到这一点”; Transcript, *Nova* 1508, 12。  
“一次特别愉快的合作”; Littlewood, *Miscellany*, 90; 又见 A. Ostrowski 在 *Experientia* 5(1949): 131~132 中所说:“他们二人的科学风格很不相同,……一个是完全投身于计算的人,他凭直觉猜测,从而得出最复杂最深藏的公式,这些发现层出不穷,终于使他一次又一次地陷入分析数学的困难之网中不能自拔;另一个则是这样一个人,他对现代分析数学的一切技巧的最微妙的论证有最上乘的本领,而且不断地用新的灵感、手段与难以捉摸的东西去丰富它们。”
- 284 页 “我所见过的最远离[忌妒]感情的人”; Snow, *Variety of Men*, 194。  
“他对于卓越性的感觉是绝对敏锐的”; Lionel Charles Robbins, in Buxton and Williams, 117; 亦见 Philip Snow(C. P. Snow 的兄弟)第 44 页上说的:“哈代是那些不相干的、无知和轻率的东西的严厉批评者。”
- 285 页 “居高临下”:访谈, Charles Burkhill。  
波利亚逛动物园的故事; George Polya, “Some Mathematicians I Have Known”, *American Mathematical Monthly* 76 (1969): 746~753。  
“我的一个上午可就白费了”; Hardy 致 Mordell 的一封信, 无日期, 现存 St. John's College。  
对人有所期望:这也是对自己的期望:“在哈代[致李特尔伍德]的信中,他一再说,‘请您检查一遍’,‘请十分细心地检

- 查',这似乎成了主题曲。一旦发现有错,他就责骂自己。这证实了我的印象,即他十分注意自己是否犯了很糟的错误。”  
*Mary Cartwright, "Some Hardy-Littlewood Manuscripts", Bulletin of the London Mathematical Society 13(1981): 273 ~ 300。*
- 286 页 “一些漂亮的问题要做”:Ramanujan, *The Lost Notebook*, 389。  
 关于洛奇:P. K. Srinivasan, 143。  
 “浴室很好而且暖和”:Bollobás, “Ramanujan—A Glimpse”, 79。  
 一连工作 30 个小时:B. M. Wilson, 未发表的记录,存于一学院。
- 287 页 “卷心菜没有神经”:Bell, 329 ~ 330。  
 “他忽略或忘记了吃饭”:Bell, 109。
- 288 页 “对体力与智力的发展”:Sathianadhan, 38 ~ 39。  
 “因苦读而形销骨立”:同上。  
 常到第二年结束时就病倒了:Lytton Committee, S. M. Barrows 的证词。
- 289 页 “容易患肺结核”:Lytton Committee, S. S. Singara 的证词。  
 “这种生活习惯……条件”:Lytton Committee, R. W. Philip 爵士的证词。  
 “自己做一两样吃的”:P. K. Srinivasan, 5。
- 290 页 用加了金属箍条的箱子给他寄米粉:Bharathi, 48。  
 关于拉马努金的饮食习惯:访谈,Janaki。  
 在早上这个奇怪的时刻:S. R. Ranganathan, 39。  
 “加一点盐和柠檬汁”:P. K. Srinivasan, 27。
- 291 页 “‘婴儿、印度人和残疾人’”:Basil Willey, *Spots of Time: A Retrospect of the Years 1897 ~ 1920* (London: Chatto and Windus, 1965), 118。
- 292 页 板球场上:*Historical Register of the University of Cambridge, Supplement, 1911 ~ 1920* (Cambridge: Cambridge University Press, 1922), 203。  
 行军鞋:*Cambridge Magazine*, 5 May 1917。  
 “我们骄傲而又悲哀的特权”:Larmor 的致词,1916 年 11 月 2 日,*Proceedings of the London Mathematical Society*. 2d Series, 16 (1917): 6。

- “绝大部分是白费了”: Barnes, 35。
- 柯林斯(Robert Collins): Seymour & Warrington, 插图 41 的说明。  
关于格雷厄姆之死见 *Madras Times*, 1919 年 4 月 6 日。
- 293 页 “追思礼拜”: Wootton, *In a World I Never Made*, 引自 Fowler and Fowler, 284。
- “情况是如此令人悲哀伤心”: Parry, 101。
- 294 页 肉类达五分之二: Marwick, 18。  
吉卜林的诗:引自 Marcus, 41。  
有一个靠得住的办法来区分在英国谁穷谁富: Marwick, 24; “穷人的饮食给下层许多人带来了另一个区别于其他阶层人的特征: 体形瘦小。”  
“红光满面的人”: Russell, 51。  
增加了 65%: Marwick, 125。  
“在雷克瑟姆”:引自 Marwick, 192。
- 295 页 “定量很奇怪地减少了”: Parry, 107。  
“好的牛奶和水果”: P. K. Srinivasan, 5。  
“工作过度, 玩乐过度, 忧虑过度”: R. C. Wingfield, *Modern Methods in the Diagnosis and Treatment of Pulmonary Tuberculosis*, 1924; 引自 Bryder, 166。
- 296 页 “我们是随护航队一起走的”: Russell, 54 ~ 55。  
关于汤普森巷的私立医院: Rankin, “Ramanujan's Manuscripts and Notebooks”, 95。  
用专电急告: P. K. Srinivasan, 73。  
哈代本人还护理过他: K. R. Rajagopalan, 41。  
“很难让他好好照料自己”: P. K. Srinivasan, 69。  
“拉马努金实在是少见的”: S. R. Ranganathan, 74。
- 297 页 “一个难缠的病人”: Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xviii。  
“当他一开始接触一个医生时”: Béla Bollobás, *in Nova* 1508, 14;  
抄本上此语来自 S. Chandrasekhar, 有误。  
很少有医生能受得了拉马努金: Rankin, “Ramanujan as a Patient”第 87 页 A. S. Ramalingam 致 Hardy 的信。  
大约是 10 月前后: 同上, 81。

- 乔里-穆图:同上,我是受 Rankin 的引导做此断言的。又见 P. K. Srinivasan, 110。
- “胃溃疡……探视手术”: Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 87, 92。
- 不是积水而是病症:同上,91。
- 血液中毒:P. K. Srinivasan, 76。
- 298 页 关于结核病的病状、治疗与历史:例如见 Bryder, Smith, Dubos, Keers。
- 英国仍占 1/8:Bryder, 1。
- 神经系统与免疫系统是有关的:例如见 Robert Kanigel, “Where Mind and Body Meet”, *Mosaic*, Summer 1986, 52 ~ 60。
- 299 页 “因……分离所造成的紧张”: George W. Comstock et al., “Tuberculosis Morbidity in the U. S. Navy: Its Distribution and Decline,” *American Review of Respiratory Disease* 110 (1974): 572 ~ 580; 访谈, George W. Comstock。
- 急剧的、阵发性的跳跃:Bryder, 109 ~ 110。
- 丹麦现象:见 Bryder, 109 ~ 112。
- 300 页 “丹麦的数字就支持这种观点”: Keers, 148。
- “令人赞美的流行病学侦探工作”: Graham A. W. Rook, “The Role of Vitamin D in Tuberculosis”, *Annual Review of Respiratory Disease* 138(1988): 768。
- 戴维斯的文章:Tubercle 66(1985): 301 ~ 306。
- “大概可以”: Rook, 769。
- 301 页 夜间工作、白天睡觉:Suresh Ram, 40。
- 奥斯勒:引自 Bulstrode, 3。
- 302 页 “这个冷得可怕的空房子”: Bollobás, “Ramanujan—A Glimpse”, 79。
- 日益为人采用:Smith, 141; Harold Batty Shaw 是在 Rankin, “Ramanujan as a Patient”第 91 页中提到的。
- 303 页 “几乎没有受到其影响”: Bryder, 23。
- “都想实行‘户外’治疗”: Bulstrode, 131。
- 至少有 52 家英国疗养院赞成它:Keers, 93; 但 Bryder 报告说,

- 于 1907 年在英格兰和威尔士有 96 家“户外”疗养院。  
门迪普丘陵只是其中之一; Bryder, 25。
- 关于马特洛克作为一个水疗法机构: Rankin, “Ramanujan Manuscripts and Notebooks”, 95。
- “不管黑夜或白天多么的寒冷”; Dubos, 181。
- 建筑师竞相; Bryder, 50。
- 304 页 “雨向里直灌”; Bryder, 53。
- “有些争吵”; P. K. Srinivasan, 71。
- “我没有姓”; Bollobás, “A Glimpse”, 79。
- 305 页 塞进去了一封短信; 访谈, Janaki。
- 婆婆带来的麻烦; 访谈, S. Sankara Narayanan。
- “年幼的媳妇从她自己家里被拉走了”; Compton, 119。
- 306 页 “恶婆婆”; *The Hindu*, 1899 年 5 月 12 日。
- 再由婆婆转交; Carstairs, 45, 66。
- 307 页 更有信心更有主见了; 访谈, S. Chandrasekhar。
- 那些接近佳娜琪的人; 主要是对以下诸位的访谈: T. V. Rangaswami, 马德拉斯的“Hari”, Mr. and Mrs. T. S. Bhamumurthy。
- 308 页 完全不可能; K. R. Rajagopalan, 41。
- 拉马努金的父亲站在佳娜琪一边; 访谈, Janaki。
- 佳娜琪最后找到了一个离开家庭的借口; 访谈, Janaki。
- 买一件新的莎丽; K. R. Rajagopalan, 44; 访谈, Janaki。
- 309 页 拉马努金的家信; 家庭记录。
- 他也告诉了朋友查特吉; Suresh Ram, 44。
- 310 页 编一本小册子; Minutes, London Mathematical Society, 14 March 1918。
- “极不赞成的眼光”; Tresilian Nicholas 的回忆, *Trinity Review*, Easter 1969, 13。
- “对战争的意见”; Levy, 279。
- 311 页 罗素与三一学院; 例如见 Hardy 自己写的 *Russell and Trinity*。  
这本小册子; *Daily Telegraph*, 30 April 1970。  
哈代帮助一名数学家免于上前线; 这位数学家是 Chapman, 1916 年 3 月 28 日 Hardy 致 Larmor 的信, Royal Society。

- 312页 “是实在而确定的”:1918年6月12日Hardy致Jenkinson的信,存剑桥大学。  
“十分冷淡,也可能是腼腆”:Hedges,117。  
“多层次的矜持”:同上,118。  
“父辈的关爱”:Seshu Iyer,85。  
313页 哈代宁取前者:Hardy,*Apology*,153。  
“总是有困难的”:Hardy,*Ramanujan*,1。  
“第一个承认自己”:Snow,“The Mathematician”,69。  
拉马努金在文学上和政治上的口味:Hardy,*Collected Papers*,715。  
“生平的事实,我全靠……”:Hardy,*Ramanujan*,2。  
“我是该受责备的”:Hardy,*Ramanujan*,11。  
314页 “超自然的洞察力”:Bell,140。  
“我们一无所知”:Ivars Peterson,“The Formula Man”,*Science News*,25 April 1987,266。  
“罩在一块没有掀开的帷幕后”:Bruce Berndt,“Ramanujan—100 Years Old”,29。  
“神秘性的笔触”:Littlewood,*Miscellany*,90。  
“通常的天才”:Mark Kac,*Enigmas of Chance*(New York: Harper & Row,1985),xxv。  
316页 “在他面前展开”:S.R.Ranganathan,87。  
“梦中向他显身”:同上,73。  
317页 他对占星术和圆梦的兴趣:P.K.Srinivasan,97。  
街上一个小贩在卖丸药:S.R.Ranganathan,84。  
抽时间占星算命:同上,91。  
预言自己的死期:P.K.Srinivasan,123。  
特里奇诺波利附近的一座庙:同上,101。  
“时间与空间一定的交汇点”:S.R.Ranganathan,85。  
318页 “摩耶就是这样在世界中起作用的”:同上,89。  
“我不相信”:Hardy,*Ramanujan*,5。  
“都一样是真的”:Hardy,*Collected Papers*,715。  
“拉马努金决不是神秘的”:Hardy,*Ramanujan*,5。

- 319 页 “不太相信哈代的洞察力”: Snow, *Apology* foreword, 35。  
“模糊思考”: Hardy, *Collected Papers*, 733。
- 320 页 “眺望远处的山脉”: 同上, 598
- 321 页 “这方面的证据太多了”: 这一引语和文中接下来的几句话均见上注, 834 ~ 838。
- 323 页 “某种神灵的世界”: Hadamard, 40 ~ 41。  
“从没放弃过一丁点儿”: Bell, 144。  
显著的神秘主义倾向: Bell, 457。  
“最奇妙的混合物”: Bell, 43。
- 324 页 “可以说是神的恩惠”: RCK, “True Genius”, *Illustrated Weekly of India*, 20 December 1987, 31。  
“宇宙的伟大建筑师”: James Jeans, *The Mysterious Universe* (New York: Macmillan), 1930。  
“即令我们不赞成神赐的说法”: Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 146。  
“拉马努金也非例外”: Hardy, *Collected Papers*, 719。  
“哈代对数学……痴迷之深”: E. A. Milne, 哈代的讣告, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 108 (1948): 45。
- 325 页 “这样严格的婆罗门”: Hardy, *Ramanujan*, 4。  
“一种无害的……真理经济原则”: 同上, 5。  
“无神论福音作者”: Hedges, 118。
- 326 页 “我从未感到她们很愉快”: *New York Times*, January 20, 1988。  
种族主义也是因素之一: 见 338 页。
- 327 页 被“拉姆医生吓住了”: Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 86。  
“来访困难”: Bryder, 200; 1917 年元月左右, 因战争而大量削减火车班次使拉马努金更陷孤立 (Marwick, 195)。  
“寒冷而倦人的旅行”: Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 85。  
“比较孤寂”: P. K. Srinivasan, 76。  
他真想吃热的 dosai: 同上, 96。  
“奇点”: Transcript, *Nova* 1508, 15。
- 328 页 1917 年 12 月 6 日: Minutes, London Mathematical Society。  
关于皇家学会: *Year-book of the Royal Society of London*, 1919

(London: Harrison and Sons, 1919)。

“但是有一项荣誉，是他最渴望的”：Snow, *Variety of Men*, 84 ~ 85。

329页 1918年1月24日：*Year-book of the Royal Society 1919*, 212.

330页 “再没有时间可丧失了”：Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 91。

“再来冥想这一点是没有用处的”：Hardy, “Obituary”, 495。

331页 “一个孤苦无依的印度人”：Hardy, *Ramanujan*, 10。

“关键性的几年”：同上, 6。

2月11日：家庭记录。

1918年1月或2月的一天：关于拉马努金企图自杀的叙述仅见 S. Chandrasekhar 存在皇家学会中的记录，发表在 *Notes and Records of the Royal Society* 30(1976), Chandrasekhar 说事件发生在 1918 年 2 月。Nandy, 127, 说是“1917 年下半年某时”，但这似与拉马努金入选皇家学会有关的几个日期相矛盾，而 Chandrasekhar 的说法与此密切相关。另一说法也不能排除，说是 1918 年 1 月底而不是 1918 年 2 月，那时，拉马努金已被选为皇家学会会员了。1月 25 日，哈代写信给迪尤斯伯里，迪尤斯伯里 3 月 5 日回信感谢哈代“对拉马努金的处境作了很清楚明确的叙述。”此外，他还表示愿意将哈代来信作为“保密的私信”。哈代会不会告诉了迪尤斯伯里拉马努金企图自杀的事？（迪尤斯伯里的信现存三一学院。）

332页 “我们苏格兰场的人”：Chandrasekhar 的陈述

333页 他把这份电报读了一遍：Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 137。

“帮助与指导”：致哈代的信，现存三一学院。

因病难以去伦敦：1918 年 5 月 15 日拉马努金致皇家学会的信，此信重登于 1987 年 12 月 19 日《印度快报》(*Indian Express*)：

A.S. 拉马林甘：关于他的情况，取自一些信件，引自 Rankin,

“Ramanujan as a Patient”, 79 ~ 100.

335页 使病人壮实起来：Bryder, 53。

336页 “多有偏见的气质”：Bryder, 208。

不准有这些特例：据向我提供南印度情况的人告知。

- 他突然打好包; S. R. Ranganathan, 79。
- 337页 很可能就是 1917 年 10 月 19 日那一次空袭; Desmukh 的记述似有矛盾, 他的记述只说是“1918 年早些时齐柏林飞艇的空袭最为严重”。但伦敦《泰晤士报》的叙述是那时首都从未受到空袭, 什么空袭都没有。最近一次可能使拉马努金有如 Desmukh 记载的那样反应大的空袭就是上述日期的那一次。  
“都是淡而无味的”: Gandhi, 40。  
“觉得很怪而且不合口味”: Neville, “The Late” (*Nature* 106), 662。
- 338页 “然而如拉马努金这样的人也应该放弃么”; Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 88  
关于拉马努金任三一学院研究员职务的事: Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 136~138; 以及 Bollobás, “Ramanujan – A Glimpse”, 79。
- 339页 身上疼痛找不到原因; Bollobás, *Littlewood's Miscellany*, 137。  
“我衷心感谢”: 同上。  
“您的努力与他们的鼓励”: 拉马努金致哈代的信, 无日期, 现存三一学院。
- 340页 “光辉发明的短暂时期”; Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 294。  
“新近的一篇文章”: Ramanujan, *Collected Papers*, 210~213。
- 341页 “同余大有实际重要性”: Hardy and Wright, 49。
- 344页 “实际上没有理由对它是真的产生怀疑”: Percy Alexander MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 2 (Cambridge: Cambridge University Press, 1916), 33.  
拉马努金在翻阅: Hardy, *Ramanujan*, 第 91 页中将此事定在 1917 年, 但 Richard Askey 觉得围绕这一发现的通信更可能是在 1916 年。  
过去已经有人证明它了: George Andrews 关于罗杰斯的工作是这样写的: “极少可能有一系列重要的论文被埋没而无人知晓竟达 20 年之久。”  
“很清楚地记得他的惊异”: Hardy, *Ramanujan*, 91。

- 345 页 “没有一个外交职务”: *Nature* 132 (1933), 701.  
 “他绝无野心”: *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* 1 (1932~1935), 299。  
 关于那个更正: *Proceedings of the London Mathematical Society* 14, Series 2, (1915), 合订本最后附文。  
 “未为人注意”: Hardy, in Ramanujan, *Collected Papers*, 344。  
 尚未得证: MacMahon, *Combinatory Analysis*, vol. 2, 33..
- 346 页 “他非常遗憾”: 1918 年 2 月 13 日 Rogers 致 F. H. Jackson 的信, 信是由 Lucy Slater 提供给 Andrews 的, 现存 Cambridge University。引自 George E. Andrews, “L. J. Rogers and the Rogers-Ramanujan Identities”, *Mathematical Chronicle*, 11(1982), 1~15。  
 “战前著名的篝火”: *Cambridge Review*, 引自 Howarth, 17~18。  
 “时间与永恒也融为一体了”: Howarth, 18。  
 “我想, 现在到时候了”: P. K. Srinivasan, 76。

## 第八章

- 347 页 “正在真正康复的路上”: P. K. Srinivasan, 76。  
 348 页 “医生十分焦急”: Seshu Iyer, 85。  
 349 页 获得了做蛋糕和面点的权利: Marwick, 271。  
 剑桥的伤亡人数: Howarth, 16。  
 “海岬上的岩石都随之快乐”: Trevelyan, *An Autobiography & Other Essays* (London: Longmans, Green and Co., 1949), 37。  
 柯林内特屋: 访谈现在的屋主 Deborah and Bryan J. B. Gauld; 实地考察。  
 萨姆尔·曼德维尔·菲利普斯: Rankin, “Ramanujan as a Patient”, 82。  
 停战后几个星期: *The Cranleighian* 13(1919), 76; “12 月 6 日, 她永远安息于教堂墓地她丈夫的墓穴中。”  
 1729: Hardy, *Collected Works*, 719~720; Snow, *Apology* foreword, 37。  
 351 页 将被任命为大学教授: Memo, 1918 年 3 月 12 日 Narayana Iyer 致 Sir Francis Spring 的信, 存马德拉斯港务信托处。

- “大学所给的慷慨资助”；P. K. Srinivasan, 46。
- 352 页 护照照片；P. K. Srinivasan, 第 136 页后的图片插页。  
拉马努金回印度：*The Hindu*, 19 December 1987; P. K. Srinivasan, 162; Berndt “Ramanujan—100 Years Old”, 26。
- 353 页 还看得见火光冲天；Hoyl, 101；这次袭击的弹片现在仍保存在马德拉斯的圣乔治堡博物馆。  
包括拉马努金的父母和妻子；Jagjit Singh, “Srinivasa Ramanujan: A Short Biography—Part I”, *Mathematical Education*, July ~ September 1987, 15。
- “只要穿上国王—皇帝的制服”；Slater, *Southern India*, 291。
- “深为关切并给予厚望”；*Journal of the Indian Mathematical Society* 9, no. 1 (February 1917): 13。
- 354 页 “惊人的发现”；S. R. Ranganathan, 37。  
“拉马努金的成名”；同上, 64。  
也有 5 个人丧生；*Journal of the Indian Mathematical Society* 10, no. 6 (December 1918): 1。
- 355 页 拉马努金在孟买和以后的活动：访谈，Janaki；家庭记录；K. R. Rajagopalan, 46 ~ 48。  
为佳娜琪操什么心；访谈，Janaki。  
两封同样的信；同上。  
兄弟的劝告；同上。  
“不会让我参加葬礼了”；Neville, “Ramanujan” (*Nature* 149), 294。  
登上了孟买邮车；P. K. Srinivasan, 92。
- 356 页 “我就看到结局了”；Ramachandra Rao, 88。  
柯马拉塔马尔的借口；访谈，Janaki。  
拉马努金被包起来送上一辆……；P. K. Srinivasan, 92。  
“此文远不能……”；Spring memo, March 27, 1919；现存马德拉斯港务信托处。  
一待健康好转；Berndt, “Ramanujan—100 Years Old”, 26。马德拉斯当地名流；K. R. Rajagopalan, 47 ~ 48。
- 357 页 路兹教堂；Muthiah, 137。

4月6日：家庭记录。

按月付：P. K. Srinivasan, 182。

某种实际的关系：访谈，Janaki。

现在他喝咖啡了：同上。

358页 “不再是那个欢乐的……拉马努金”：S. R. Ranganathan, 71。

“他已不是原来的拉马努金”：P. K. Srinivasan, 101。

“那只是魔鬼”：同上。

觉得他心事重重：1937年8月4日 S. Chandrasekhar 敦哈代的信，存三一学院。

另一些记载：见 Nandy, 131。

359页 成了导火索：A. Ranganathan, 1981年1月12日的信，信存皇家学会。

“钻石耳环”：Transcript, *Nova* 1508, 16。

哥印拜陀和戈杜穆地之争：访谈，Janaki；家庭记录。但 T. V. Rangaswami 访谈时却说，拉马努金至少在当年晚些时，在哥印拜陀住了短短一段时间；而 K. R. Rajagopalan 第 48 页也提到在哥印拜陀呆了些时；但即令如此，为时亦甚短暂。

拉马努金在戈杜穆地之停留：与城里的人的访谈，其中有 R. Chandrasekhar 和 K. Elangovan。

户籍员办公室：访谈，Janaki。

大吵了起来：此事的时间和起因，都是根据佳娜琪的谈话和家庭记录。

360页 “要是你和我一同去了英国”：这句话佳娜琪多年来经常说起，也见 1987 年 12 月 19 日《印度教徒报》。

洗头擦油：访谈，马德拉斯的“Hari”，他说是佳娜琪告诉他的。

叫佳娜琪打起行李：Nandy, 130。

每星期天：家庭记录。

费恩赛德：P. K. Srinivasan, 182。

坦贾武尔的泰米尔语谐音：此说有多种版本，例如见 S. R. Ranganathan, 93。

柯马拉塔马尔这次下了命令：访谈，Janaki。

先去找了一个房子：家庭记录。

- 361页 “坚持要去看我的姑母”:Seshu Iyer, 82。  
干茄子片:P. K. Srinivasan, 103。  
“有力的能看透人的眼睛”:S. R. Ranganathan, 75。  
钱德拉塞卡医生:K. R. Rajagopalan, 49; P. K. Srinivasan, 108; A. Ranganathan, 1981年1月12日和3月26日的两封信,信存皇家学会。  
“这就是肺结核的发烧”:K. R. Rajagopalan, 48。  
活不过5年:Keers, 144。
- 362页 “他的健康情况依旧很糟”:1919年12月22日Dewsbury致Hardy的信,信存三一学院。  
拒绝进一步治疗:Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xviii。  
放弃了求生之念:1981年1月12日A. Ranganathan的信,信存皇家学会。  
拒绝到马德拉斯去:Seshu Iyer and Ramachandra Rao, xviii。  
大约才过了年初的某个时候:1920年1月15日Dewsbury致Hardy的信,信存三一学院。  
暂时还只走到了火车站:访谈, Janaki。
- 363页 称为“戈美特拉”:访谈, Mr. and Mrs. T. C. Krishna, 戈美特拉现在的房主。  
“我称之为仿θ函数”:Ramanujan, *Collected Papers*, xxxi。  
“在某些方面可以说是拉马努金最好的作品”:S. Chandrasekhar, Transcript, *Nova* 1508, 16。
- 364页 “我们知道……可以多么漂亮”:G. N. Watson, “The Final Problem”, *Journal of the London Mathematical Society* 11 (1936): 57。
- 365页 “冰冷的不朽的双手”:同上, 80。
- 366页 “分辨清楚都很难”:访谈, George E. Andrews, in “Spectacular Genius”, *The Hindu*, 21 January 1987。  
最终的灿烂:见 McMurry 的关于结核病的种种神话的一个有真知灼见的研究。
- 367页 “成反比地变得更锐利,更光辉”:Seshu Iyer, 85。  
“狂野的古怪的天才”:访谈, George E. Andrews, in “Spectacular Genius”, *The Hindu*, 21 January 1987。

- 克赖南特不吉利：访谈，T. V. Rangaswami。  
南贝努马尔·切蒂：*Who's Who in Madras*, 1934。  
“戈美特拉”：由 T. C. Krishna 先生和夫人带领参观这幢屋子。  
可以在这里稍事休息：Janaki 在一次访谈时回忆起拉马努金呆在一个大“厅”里，这个厅可能是指的起居室。
- 368 页 家具很少：P. K. Srinivasan, 163。  
客人们走动的脚步都放轻了：“His Papers Disappeared Mysterious”，*The Hindu*, 21 June 1981。  
小心地守着防人接近：P. K. Srinivasan, 162。  
佳娜琪的弟弟和她站在一边：同上, 163。  
关于纳拉亚纳斯瓦米·耶尔：S. R. Ranganathan, 14。
- 369 页 “回光返照”：McMurry, 140。  
订几份数学杂志：1920 年 1 月 15 日 Dewsbury 致 Hardy 的信，  
信存三一学院。  
切特普特的泰米尔语谐音：S. R. Ranganathan, 93。
- 370 页 “他一直对我很好”：S. R. Ranganathan, 91；佳娜琪证实拉马努金肯定自己快死了。  
一块辣椒……：K. R. Rajagopalan, 50。  
小铃铛和小棍：访谈，Janaki。  
想吃 rasam 汤：P. K. Srinivasan, 136。  
打成一团：访谈，Janaki。  
“内心已离开了这个人世”：P. K. Srinivasan, 111。  
“皮包骨头”：S. R. Ranganathan, 91；关于拉马努金最后几天的情况大多来自与佳娜琪的访谈以及她多年来许多次讲到的事。
- 371 页 亲戚都没有来：K. R. Rajagopalan, 51。  
拉马钱德拉·拉奥安排火化：P. K. Srinivasan, 88。  
正式记载了他的死亡：*The Hindu*, 3 January 1988。  
苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡：见 Kameshwar C. Wali, *Chandra* (Chicago: University of Chicago Press, 1990)。
- 372 页 “记得……多么高兴”：Andrews et al., 3。  
“我们为一些人骄傲”：Muthiah, 6。

- “受到过他的榜样的鼓舞”: Andrews et al., 5.  
不好好读书:S. R. Ranganathan, 20。  
373页 “欲哭无泪”: 1981年1月12日 A. Ranganathan 的信,信存皇家学会。  
“全由其妻控制”: 1920年4月29日 Lakshmi Narasimhan 致 Hardy 的信,信存三一学院。  
374页 拉马努金父亲之死:访谈,V. Viswanathan, 我不知道拉马努金母亲何时去世,但 V. Viswanathan 有一位姐妹(纳拉亚纳·耶尔之孙女)说,当第二次大战中马德拉斯疏散人口时,大约是 1942, 她曾在贡伯戈纳姆见到过柯马拉塔马尔,其时她应已 74 岁。  
“时常愁眉不展”: Bharathi, 51。  
柯马拉塔马尔的信: 1927 年 8 月 25 日 Komalatammal 写给 Hardy 的信,信存三一学院。  
375页 “看望我们也是安慰她自己”: P. K. Srinivasan, 101。  
受到家里人怎样的对待: 访谈, Janaki。  
拉马努金去世前两天: 同上。  
376页 后半个世纪:T. V. Rangaswami 说, 1931 年她曾在马德拉斯见到 A·S·拉马林甘。  
踩缝纫机: 访谈, Janaki; 又见 K. R. Rajagopalan, 53。  
“亲戚……骗光了”: 1937 年 8 月 4 日 S. Chandrasekhar 致 Hardy 的信,信存三一学院。  
佳娜琪和纳拉亚南: 访谈, Janaki; 亦见 K. R. Rajagopalan, 53。  
377页 “他已经不在人间”: Ramachandra Rao, 87。  
“无效率的僵化的教育制度”: Hardy, *Ramanujan*, 7。  
“印度性”: Ramachandra Rao, 89。  
“在外部世界的心目中提高了印度”: *Journal of the Indian Mathematical Society* 11 (April 1919), 1。  
“偏离常规”: S. Chandrasekhar, “On Ramanujan”, in G. E. Andrews et al., 4。  
378页 “更深入地与西方密切联系”: Nandy 139。  
“他振作了我们的士气”: 访谈, P. K. Srinivasan。  
379页 “拉马努金之手……的一击”: Neville, *Reading Manuscript*。

- 380页 “某种永久的纪念”: P. K. Srinivasan, 79.
- 381页 关于威尔逊和沃森: 沃森于1929年6月28日去信威尔逊说: “最近三个月来, 我对拉[马努金]的兴趣变大了, 我已由 J. M. B. 职务上退休, 有时间做关于他的事情了。”信存三一学院。
- “更浪漫的性格”: R. D. Carmichael, “Some Recent Researches in the Theory of Numbers”, *American Mathematical Monthly* 39, no. 3 (1932): 140。
- “如此充满人性的趣味”: Mordell, “Ramanujan”, 642。
- “我马上就以极大的兴趣读了它”: Paul Erdos, “Ramanujan and I”, in *Number Theory, Madras 1987*, ed. K. Alladi, no. 1395 in the series, Lecture Notes in Mathematics, ed. A. Dold and B. Eckmann (Berlin: Springer-Verlag, 1989), I. 所说的哈代-拉马努金合写的文章, 即 Ramanujan, *Collected Papers* 第35篇。
- 382页 “非同寻常而且有点奇特”: Atle Selberg, “Ramanujan and I”, *Science Age*, February 1988, 37.
- 383页 “我最喜欢的一章”: Freeman Dyson, “A Walk Through Ramanujan’s Garden”, in G. E. Andrews et al., 9.
- 384页 “1917年的死亡与毁灭”: 同上, 15。
- “来自拉马努金”: Morris Newman, “Congruence Properties of the Partition Function”, *Report of the Institute in the Theory of Numbers* (University of Colorado, 1959)。
- “培训一下”: Hardy, *Collected Papers*, 720。
- 385页 “与欧拉接触”: Littlewood, *Miscellany*, 86。
- 10年才能卖完: 1929年8月23日 R. J. L. Kingford致 Hardy 的信, 信存三一学院。
- “出于自愿专心于此的人”: 访谈, Freeman Dyson。
- “一叠发黄的旧纸”: S. Ramaseshan, “Srinivasa Ramanujan”, *Proceedings of the Ramanujan Centennial International Conference*, ed. R. Balakrishnan et al. (Madras, 1988), 6。
- 386页 “一个更确定的形象”: Littlewood, *Miscellany*, 86。
- 斯里尼瓦散的计划: 访谈, P. K. Srinivasan; 亦见 P. K. Srinivasan, vi ~ x.

- 387 页 “论某些算术函数”: Ramanujan, *Collected Papers*, 136 ~ 162.
- 388 页 “至今还没有完全了解”: Hardy, *Ramanujan*, 161。
- “挡住”: S. Raghavan, “Impact of Ramanujan’s Work on Modern Mathematics”, *Srinivasa Ramanujan Centenary, 1987 [Journal of the Indian Institute of Science 特刊]*, 46.
- 哈代在 1940 年的一篇文章: Hardy, *Ramanujan*, 170。
- 389 页 与巴赫的比较: Berndt, “Ramanujan—100 Years Old”, 24 ~ 29。
- 失去的笔记本的发现: 访谈, George Andrews; Transcript, *Nova 1508*, 17; Andrews, *Q-Series*.
- 392 页 “这使我很苦恼”: 访谈, Bruce Berndt。
- “实质的深度”: 访谈, Freeman Dyson。
- “如果要我解释”: Hardy, *Some Famous Problems*, 4.
- 393 页 “太菲薄的金钱回报”: *Journal of the Indian Mathematical Society* 13, no. 3 (June 1921): 100.
- 394 页 “造更好的高炉”: Bharathi, 93。
- 塑料: S. Ramaseshan, “Srinivasa Ramanujan”, 11
- 癌症: 此次会议举行于 1988 年 11 月 10 ~ 12 日, 报上的文章见 *The Hindu*, 1988 年 12 月 23 日。
- 395 页 “硬六边形模型”: R. J. Baxter, “Ramanujan’s Identities in Statistical Mechanics”, in Andrews et al., 69 ~ 84; 亦见 Gurney Williams III, “The Master of Math”, *Omni*, December 1987, 58 ~ 64.
- “脑袋里似乎有个计算机代数软件包”: Saraswathi Menon, “Beautiful Important Work”, *The Hindu*, 22 December 1987.
- 396 页 “他其实不需要这种软件包”: Andrews, *Q-Series*。
- “吹牛”: 访谈, Freeman Dyson. Bruce Berndt 曾写信给我说起戴森也说拉马努金的另一项应用是“吹牛”。洛斯阿拉莫斯国家实验室(Los Alamos National Laboratory)的物理学家 William Beyer 曾说拉马努金的公式“在预报核战争上很有用”。当然这个公式并没有真正“预报”核战争, 而只是为估计其可能性之大小的理论模型提供了基础。
- “似乎能一眼就看上”: Askey, 72.
- “为之目瞪口呆”: Transcript, *Nova 1508*, 12.

- 397 页 产生一种“战栗”：G. N. Watson, “The Final Problem”, *Journal of the London Mathematical Society* 11 (1936): 80。  
“某种永恒性”：Hardy, *Some Famous Problems*, 4~5。
- 398 页 装在框子里并饰以花环的拉马努金像：此庆祝仪式之录像带。马德拉斯大学注意到：S. R. Ranganathan, 55；天体物理学家钱德拉塞卡在使佳娜琪得到较好的照顾上也起了作用。佳娜琪资助她的儿子：访谈，Janaki。
- 399 页 “塑像在哪里”：*Hindu*, 21 June 1981。  
格兰伦德铸的塑像：访谈，Richard Askey。
- 400 页 每天下午：访谈，T. V. Rangaswami. 他说，上午佳娜琪都要做祷告和做饭。  
放声痛哭：访谈，T. V. Rangaswami。  
为什么要等外国人来使他扬名：P. K. Srinivasan 在访谈中说，拉马努金“生于印度，在英国重生，现在又活在美国”。  
“无法……谋一个教职”：J. B. S. Haldane 在文末附言中引用了“RGK”的“True Genius”，30。
- 401 页 “在微贱中凋零”：Bharathi, 36。  
“新印度和一个新世界”：Nehru, *Discovery of India* (London: Meridean Books), 1960。  
好多个拉马努金：访谈 R. Viswanathan, 于贡伯戈纳姆。
- 403 页 “给拉马努金的美名抹黑”：S. Chandrasekhar, “An Incident in the Life of S. Ramanujan...”, 记录现存皇家学会。  
拉马努金研究所：访谈，K. S. Padmanabhan。
- 404 页 “多少个教务长”：S. Ramaseshan, 3。  
“智慧之光”：“True Genius”，31，作者“RGK”。  
“本会之破产就成为明显之事”：Joint Secretary D. D. Kapadia 在印度数学会 1919 年 1 月 11~13 日第二次会议上的报告，刊于该会杂志 (*Journal*) 上。
- 406 页 “没有得到拉马努金……的信任”：Neville, *The Farey Series of Order 1025* (Cambridge: University Press, 1950), xxvii。  
哈代最大的贡献：引自 *The Hindu*, 19 December 1987。  
*svayambhu*(自生的)：“RGK”著“True Genius”，26。

407 页 “我并没有发明他”:Hardy, *Ramanujan*, 1。

## 尾 声

409 页 “主要的永远的幸福”:Hardy 致 Thomson 信, 13 December 1919, 信存剑桥大学。

战争时期留下的……伤害:Hardy, *Russell and Trinity*, 10:“在 [战争] 年代中, 学院的生活……肯定是不愉快的, 对它们的回忆是我决定去牛津的重要因素。”

“对哈代更为阴暗”:Snow, *Apology* foreword, 38。

“觉得他必须走了”:Young, 287。

410 页 “剑桥诱人”:Rose and Ziman, 44~45。

“奉[大学理事会]示”:致 Hardy 信, 1920 年 4 月 29 日, 信存三一学院。

“至为震惊哀痛”:P.K. Srinivasan, 78。

411 页 “德国人将被贬入这样一类人”:引自 Joseph W. Dauben, “Mathematicians of World War I: The International Diplomacy of G. H. Hardy and Gösta Mittag-Leffler as Reflected in Their Personal Correspondence”, *Historia Mathematica* 7(1980): 261~288。

“稍微变一下正负号”:这个故事流传甚广, Young, 第 280 页的只是其中一说。

“改变自己的观点”:Hardy 致 Mittag-Leffler 的信, Dauben 的 “Mathematicians of World War I” 引用了此信。

412 页 “一生最愉快的时期”:Snow, *Apology* foreword, 40;“当哈代在剑桥的高桌子上社交不愉快以后, 哈代出奇地打开心扉, 在新立学院的对于他有些生疏的气氛中很高兴。肯定他立即就受到欢迎, 他以其睿智的令人兴奋的谈吐, 来回报他所得到的同情和友谊。”E. A. Milne, 哈代的讣告, 刊在 *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 108(1948): 46。

“对高级员工只是顺从”:Mary Cartwright, “Moments in a Girl’s Life”, 未发表手稿, 5。

“过得很快乐”:1929 年 4 月 24 日 Hardy 致普林斯顿大学校长的信,(信头印的是 the Mayflower Hotel, Washington, D. C.)。

- 413 页 鲁思和霍布斯：“他对棒球[和对板球]具有同样的热情。在美国时，一有机会他就去看棒球。”引自某杂志审稿人对一篇关于拉马努金和哈代的文章的审稿意见。Robert Rankin, Glasgow。
- “一本很了不起的书”：Hardy致R. P. Boas的明信片，1940年1月10日。
- 在牛津的网球照片：现存三一学院。
- 退休规则：Snow, *Apology* foreword, 43。
- “可以听到这群人的笑声”：Snow, “The Mathematician”, 72。
- 414 页 “一个真正的数学家”：Snow, *Apology* foreword, 9。
- “突然变得……有同等地位”：Young, 293。
- “深切关怀”：A. V. Hill, 讣告，发表于 *The Mathematical Gazette* 22(May 1948), 51。
- “我就不能再留在其中”：Hardy致Mordell的信，信存St. John's College。
- “不甚宽厚的结论”：Hardy, *Collected Papers*, 611。
- 415 页 “他和矿工们站在一起”：J. B. S. Haldane, “A ‘Pure’ Scientist—and a Great One”, *Daily Worker* (London), 29 December 1947。
- “对精确的思想有一种神秘的恐怖感”：Hardy, *Collected Papers*, 260。
- 后来还有人埋怨：J. C. Burkill, review of *Collected Papers of G. H. Hardy*, vol. 7, *Bulletin of the London Mathematical Society* 12 (1980): 226。
- 从苏联来的贺信：1934年2月20日苏联大使致Hardy的信，信存三一学院。
- 荣誉学位：据 *The Scotsman* (3 December 1947) 报道，在接受爱丁堡大学的荣誉学位后，哈代和一群数学家在外面散步，他突然看见一只老鼠，他的同事们“由此获得一种特权：亲眼目睹这位伟大的数学家双手双脚在地上跟着它绕着一棵树爬。”
- 416 页 哈代的“新年决心”：J. C. Burkill 在 *Dictionary of Scientific Biography* 中关于 Hardy 的条目。
- 他的怪癖倾向：Young, 276。

- “老白兰地”:Snow, *Apology* foreword, 48。
- 417页 “上了年纪,萎缩了的复制品”:Wiener, *I Am a Mathematician*, 152。  
“年轻人的敏锐和力量”:Hardy, *Collected Papers*, 745。  
当哈代打扫书架时:访谈,Mary Cartwright。  
他最重要的文章:Titchmarsh, 458~461。  
“如同兰多夫斯卡演奏巴赫”:1967年5月22日Freeman Dyson致C.P.Snow的信,信存Freeman Dyson处。
- 418页 “使他看起来这样衰老”:访谈,Mary Cartwright;照片上用蓝墨水写着:“他从没有看来如此衰老”,肯定出于他妹妹之手。照片存在三一学院。  
哈代企图自杀:Snow, *Apology* foreword, 54。  
“只能得到这个结论”:同上,57。  
“哈代快死了”:Philip Snow, 95。  
“一个伟大时代终结”:Norbert Wiener, *Bulletin of the American Mathematical Society* 55(1949): 77。  
“萦绕着悲伤的书”:Snow, *Apology* foreword, 50。  
“这是一种哀伤的经验”:Hardy, *Apology*, 61。
- 419页 “完全平等……做了一些事”:同上,148。  
“最痛心的事情”:Mary Cartwright, “Moments in a Girl's Life”, 未发表稿,7。  
“一个传奇性的事件”:Hardy, *Ramanujan*, 2。  
“最细心的编辑”:Hardy致Mittag-Leffler的信,约在1920年。
- 420页 “简短却又能刻画其特点的例证”:Hardy, in Ramanujan, *Collected Papers*, 232。  
“我一生中决定性的事件”:Hardy, *Apology*, 148。  
“贫困而又孤独的印度教徒”:Hardy, *Ramanujan*, 10。
- 421页 “关于数学的最出色的文章之列”:Manchester *Guardian*, 2 December 1947。  
“最吸引人的悼文”:引自Andrews, *Q-Series*。  
自己著书的主要对象:Nandy, 3。  
哈代关于拉马努金的报告:Hardy, *Collected Papers*, 491~503。

- 422 页 “失大于得”: Hardy, *Collected Papers*, 720。  
“留不住一点秘密”: Snow, *Apology* foreword, 30。  
“哈代极为骄傲”: 访谈, Mary Cartwright。  
“我要做一些演讲”: 1936 年 2 月 19 日 Hardy 致 Chandrasekhar 的信, 信存三一学院。  
“爱之作”: Mordell, “Ramanujan”, 642。  
哈佛大学 300 周年校庆: 例如见 *Harvard Alumni Bulletin*, 30 September 1936; *The Tercentenary of Harvard College* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1937), Jerome D. Greene 编; *Harvard Magazine*, May ~ June 1986。
- 423 页 “领导数学”: 存于三一学院。  
“谢莱案件”: Newman, *The World of Mathematics*, vol. 4 (New York: Simon and Schuster, 1956), 2036; 按 Newman 的说法, 这个故事是最高法院法官 Felix Frankfurter 说的。  
去希特勒军队中: “Highbrows at Harvard”, *Time*, 14 September 1936。  
大约晚上 9 点: 会议日程 *The Tercentenary of Harvard College*, Appendix N, 465。
- 424 页 “一个很伟大的数学家”: Hardy, *Ramanujan*, 1。

## 参 考 文 献

- Alexanderson, G. I.. *The Polya Picture Album: Encounters of a Mathematician*. Boston: Birkhäuser, 1987.
- Andrews, George E. "An Introduction to Ramanujan's 'Lost' Notebook." *American Mathematical Monthly* 86 (1979) :89 ~ 108.
- . *Number Theory*. Philadelphia: W. B. Saunders Company, 1971.
- . *Q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra*. Providence, R. I.: American Mathematical Society, Regional Conference Series in Mathematics, No. 66, 1986.
- , Richard A. Askey, Bruce C. Berndt, K. G. Ramanathan, and Robert A. Rankin. *Ramanujan Revisited*. San Diego: Academic Press, 1988.
- Askey, Richard A. "Ramanujan and Hypergeometric and Basic Hypergeometric Series." In *Ramanujan International Symposium on Analysis*, edited by V. K. Thakare. Macmillan India, 1989.
- Association of Mathematics Teachers of India. *Ramanujan Centenary Year Souvenir*. Proceedings of 22d annual conference, 3 ~ 6 December 1987.
- Atkinson, Thomas Dinham. *Cambridge Described and Illustrated*. London: Macmillan, 1897.
- Balakrishnan, R., K. S. Padmanabhan, and V. Thangaraj. *Proceedings of the Ramanujan Centennial International Conference*. 15 ~ 18 December 1987, at Annamalai University, Annamalainagar. Ramanujan Mathematical Society, 1988.
- Balasubrahmanyam, S. R. *Later Chola Temples*. Mugdala Trust, 1975.
- Barham, Jane. *Backstairs Cambridge*. Herts, England: Ellisons' Editions, 1986.
- Barlow, Glyn. *The Story of Madras*. London: Humphrey Milford, Oxford Uni-

- versity Press, 1921.
- Barnes, John. *Ahead of His Age—Bishop Barnes of Birmingham*. London: Collins, 1979.
- Bateman, P., and H. Diamond. "John E. Littlewood (1885 ~ 1977)," *Mathematical Intelligencer* 1 (1978): 28 ~ 33.
- Bell, E. T. *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1986.
- Berndt, Bruce C. "A Pilgrimage." *Mathematical Intelligencer* 8, no. 1 (1986): 25 ~ 30.
- . "The Quarterly Reports of S. Ramanujan." *American Mathematical Monthly* 90, no. 8 (October 1983): 505 ~ 516.
- . "Ramanujan—100 Years Old (Fashioned) or 100 Years New (Fangled)?" *Mathematical Intelligencer* 10, no. 3 (1988): 24 ~ 29.
- . *Ramanujan's Notebooks*. 2 parts. New York: Springer-Verlag, 1985 ~ 1989.
- Bhanumurthy, Kalyanalakshmy. "[Ramanujan:] The Man Behind His Mathematics." *The Hindu*, 20 December 1987.
- Bharathi, Ramananda. *Prof. Srinivasa Ramanujan Commemoration Volume*. Madras: Jupiter Press, 1974.
- Bhattacharaya, Jogendra Nath. *Hindu Castes and Sects*. Calcutta: Editions Indian, 1896. Reprinted, Calcutta, 1973.
- Bishop, T. J. H., in collaboration with Rupert Wilkinson. *Winchester and the Public School Elite*. London: Faber and Faber, 1967.
- Bollobás, Béla, ed. *Littlewood's Miscellany*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- . "Ramanujan—A Glimpse of His Life and His Mathematics." *Cambridge Review*, June 1988, 76 ~ 80.
- Borwein, Jonathan M., and Peter B. Borwein. "Ramanujan and Pi." *Scientific American* 258, no. 2 (February 1988): 112 ~ 117.
- Brandon, Peter. *A History of Surrey*. The Darwen County History Series. Phillimore.
- Bromwich, T. J. I'A. *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. London: Macmillan, 1908.

- Bryder, Linda. *Below the Magic Mountain*. Oxford: Clarendon Press, 1988.
- Bulstrode, H. Timbrell. *Report on Sanatoria for Consumption*. 35th Annual Report 1905 ~ 06, Supplement in Continuation of the Report of the Medical Officer for 1905 ~ 06. London: His Majesty's Stationery Office, 1908.
- Burkhill, J. C. "John Edensor Littlewood." *Bulletin of the London Mathematical Society* 11 (1979): 59 ~ 103.
- Butler, J. R. M. *Henry Montagu Butler: Master of Trinity College Cambridge 1886 ~ 1918*. London: Longmans, Green and Co., 1925.
- Buxton, John, and Penry Williams, eds. *New College, Oxford 1379 ~ 1979. The Wardens and Fellows of New College, Oxford*, 1979.
- Campbell, Douglas M., and John C. Higgins. *Mathematics: People, Problems, Results*. 2 vols. Belmont, Calif.: Wadsworth, 1984.
- Carr, G. S. *Formulas and Theorems in Pure Mathematics*. 2d ed. New York: Chelsea, 1970. (Originally published as *A Synopsis of Results in Pure and Applied Mathematics*.)
- Carstairs, G. Morris. *The Twice-Born*. Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1967.
- Cartwright, Mary. "John Edensor Littlewood, FRS, FRAS, Hon FTMA." *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*. April 1978, 87 ~ 90.
- Centenary Celebration Souvenir. Kumbakonam: Town High School, 1964.
- Chaudhuri, Nirad C. *A Passage to England*. London: Macmillan, 1959.
- Chopra, P. N., T. K. Ravindran, and N. Subrahmanian. *A History of South India*. 3 vols. New Delhi: S. Chand & Co., 1979.
- Clark, Geoffrey, and W. Hardling Thompson. *The Surrey Landscape*. London: A. & C. Black, 1934.
- Clark, Ronald W. *The Life of Bertrand Russell*. New York: Knopf, 1976.
- "Close Up: Professor J. E. Littlewood, F. R. S." *Trinity Review*, Michaelmas 1959.
- Collins, Randall. *The Case of the Philosophers' Ring by Dr. John H. Watson*. New York: Crown Publishers, 1978.
- Colonial Students in Britain. London: PEP (Political and Economic Planning), 1955.

- Compton, Herbert. *Indian Life in Town and Country*. New York: G. P. Putnam's, 1904.
- Das, R. K. *Temples of Tamilnad*. Bomhay: Bharatiya Vidya Bhavan, 1964.
- Davis, Philip J., and Reuben Hersh. *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhäuser, 1981.
- Deacon, Richard. *The Cambridge Apostles*. London: Robert Royce Limited, 1985.
- Dubos, René and Jean. *The White Plague: Tuberculosis, Man and Society*. Boston: Little, Brown and Company, 1952.
- Dunning, Eric, and Kenneth Sheard. *Barbarians, Gentlemen and Players: A Sociological Study of the Development of Rugby Football*. New York: New York University Press, 1979.
- Ellis, Havelock. *A Study of British Genius*. London: Hurst and Blackett, 1904.
- , and John Addington Symonds. *Sexual Inversion*. London: Wilson and Macmillan, 1897.
- Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. 4th ed. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1976.
- Foster, M. . and Lewis Shore. *Physiology for Beginners*. London, 1894.
- Fowler, Laurence, and Helen Fowler. *Cambridge Commemorated*. Cambridge University Press, 1984.
- Fuller, Bampfylde. *The Empire of India*. London: Sir Isaac Pitman & Sons, 1913.
- Furbank, P. N. *E. M. Forster: A Life*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1978.
- Gandhi, Mohandas K. *Autobiography: The Story of My Experiments with Truth*. Public Affairs Press, 1948. Reprint. New York: Dover, 1983.
- Cleick, James. "An Isolated Genius Is Given His Due." *New York Times*, July 14, 1987, 17.
- Hadamard, Jacques. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton: Princeton University Press, 1949.
- Halperin, John. *C. P. Snow: An Oral Biography*. New York: St. Martin's Press, 1983.

- Hardy, G. H. *Bertrand Russell and Trinity*. Cambridge University Press, 1970.
- . *Collected Papers of G. H. Hardy*. Vol. 7. Oxford: Clarendon Press, 1979.
- . *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press, 1908.
- . *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, 1940. Reprint, with a foreword by C. P. Snow, 1967.
- . "Obituary, S. Ramanujan." *Nature* 105 (June 17, 1920), 494 ~ 495.
- . *Orders of Infinity: The "Infinitarecalcul" of Paul Du Bois-Reymond*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 12. Cambridge University Press, 1910.
- . *Ramanujan*. Cambridge University Press, 1940. 3d ed. New York: Chelsea, 1978.
- . *Some Famous Problems of the Theory of Numbers*. Oxford: Clarendon Press, 1920.
- , and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. 3d ed. Oxford: Clarendon Press, 1954.
- Hemingway, F. R. *Tanjore District Gazetteer*. 1915.
- Himmelfarb, Gertrude. *Marriage and Morals Among the Victorians*. New York: Alfred A. Knopf, 1986.
- Historical Register of University of Cambridge*. Supplement 1, 1911 ~ 1920. Cambridge University Press, 1922.
- Hodges, Andrew. *Alan Turing: The Enigma*. New York: Simon and Schuster, 1983.
- Howarth, T. E. B. *Cambridge Between Two Wars*. London: Collins, 1978.
- Hoyt, Edwin P. *The Last Cruise of the Emden*. New York: Macmillan, 1966.
- Hynes, Samuel. *The Victorian Turn of Mind*. Princeton: Princeton University Press, 1968.
- Imperial Gazetteer*. Madras Presidency, 1908.
- Indian Scientists*. Madras: G. A. Natesan & Co., 1929.
- Jekyll, Gertrude. *Old West Surrey*. London: Longmans, Green and Co., 1904.
- Jordan, M. C. *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. Paris: Gauthier-Villars, 1882.

- Kandaswamy Moopanar, R. "My Reminiscences." *Centenary Celebration Souvenir*. Kumbakonam: Town High School, 1964.
- Keers, R. Y. *Pulmonary Tuberculosis: A Journey Down the Centuries*. London: Balliere Tindall, 1978.
- Keynes, Margaret Elizabeth. *A House by the River*. Cambridge: Darwin College, 1976.
- Kitcher, Philip. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press, 1983.
- Krishnaswami Nayudu, W.S. *Old Madras*, 1965.
- Lanchester, H. V. *Town Planning in Madras*. (Based on lectures given in Madras in January 1916.) London: Methuen, 1926.
- Levy, Paul. *Moore: G. E. Moore and the Cambridge Apostles*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1979.
- Lewandowski, Susan. *Migration and Ethnicity in Urban India: Kerala Migrants in the City of Madras, 1870 ~ 1970*. New Delhi: Manohar, 1980.
- Littlewood, J. E. "Adventures in Ballistics, 1915 ~ 1918." *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, September/October 1974, 323 ~ 328.
- . "Mathematical Life and Teaching in Cambridge Since 1880." Lecture notes.
- . "The Mathematician's Art of Work." *Rockefeller University Review* 5 (September-October 1967) : 1 ~ 7.
- . *A Mathematician's Miscellany*. London: Methuen & Co., 1953.
- . "Reminiscences of Cambridge and Elsewhere." Lecture notes.
- Marcus, Geoffrey. *Before the Lamps Went Out*. Boston: Little, Brown, 1965.
- Marvin, F. S. *India and the West*. London: Longmans, Green and Co., 1927.
- Marwick, Arthur. *The Deluge: British Society and the First World War*. New York: W. W. Norton, 1970.
- Mayo, Katherine. *Mother India*. New York: Harcourt, Brace, 1927.
- McMurtry, Nan Marie. "And I? I Am in a Consumption": *The Tuberculosis Patient, 1780 ~ 1930*. Dissertation. Ann Arbor: University Microfilms, 1985.
- Megahey, Alan J. *A History of Cranleigh School*. London: Collins, 1983.
- Molony, J. Chartres. *A Book of South India*. London: Methuen, 1926.

- Mordell, L. J. "Hardy's *A Mathematician's Apology*." *American Mathematical Monthly* 77 (1970): 831 ~ 836.
- . "Ramanujan." *Nature* 148, no. 3761 (November 1941): 642 ~ 647.
- Muthiah, S. *Madras Discovered*. New Delhi: Affiliated East-West Press, 1987.
- Nagarajan, K. R., and T. Soundararajan, eds. *Srinivasa Ramanujan, 1887 ~ 1920: A Tribute*. Madras: Macmillan India, 1988.
- Nairn, Ian, and Nikolaus Pevsner. *Surrey*. Harmondsworth, England: Penguin Books, 1962.
- Nandy, Ashis. *Alternative Sciences: Creativity and Authenticity in Two Indian Scientists*. New Delhi: Allied Publishers, 1980.
- Neville, E. H. "The Late Srinivasa Ramanujan." *Nature* 106, no. 2673 (January 1921): 661 ~ 662.
- . "Srinivasa Ramanujan," *Nature* 149, no. 3776 (March 1942): 292 ~ 295.
- . "Srinivasa Ramanujan." Original text of a talk first broadcast in English not later than 1938 and in Hindustani, April 22, 1941. A substantially longer version of the *Nature* article, above. Referred to in the Notes as the Reading Manuscript.
- Newman, M. H. A., et al. "Godfrey Harold Hardy, 1877 ~ 1947." *Mathematical Gazette* 32 (1948): 49 ~ 51.
- Padfield, J. E. *The Hindu at Home*. 1908, 2d facsimile ed. Delhi: B. R. Publishing Corporation, 1975.
- Parry, R. St. John. *Henry Jackson, O. M.* Cambridge: Cambridge University Press, 1926.
- Polya, George. "Some Mathematicians I Have Known." *American Mathematical Monthly* 76 (1969): 746 ~ 753.
- The Port of Madras: Past, Present and Future*. Madras Port Trust, 1967.
- "R. G. K." "True Genius." In *Illustrated Weekly of India*, 20 December 1987, 26 ~ 30.
- "Ragami" [pseud.]. *Ramanujan, the Mathematical Genius* [Tamil]. Series. *Dinamani Kadir* (Madras weekly newspaper), 1985 ~ 1986.
- Rajagopalan, K. R. *Srinivasa Ramanujan*. Madras: Sri Aravinda-Bharati, 1988.

- Rajagopalan, T. R. *Pilgrim's Guide (South India)*. Madurai: Sri Karthikeya Publication, 1977.
- Ram, Suresh. *Srinivasa Ramanujan*. New Delhi: National Book Trust, 1972.
- Ramachandra Rao, R. "In Memoriam: S. Ramanujan." *Journal of the Indian Mathematical Society* 12, no. 3 (June 1920): 87 ~ 90.
- Ramakrishna, G., N. Gayathri, and D. Chattopadhyaya. *An Encyclopaedia of South Indian Culture*. Calcutta: K.P. Bagchi, 1983.
- Ramakrishna, T. *My Visit to the West*. London: T. Fisher Unwin, 1915.
- Ramanathan, K. G. "Ramanujan: A Life Sketch." *Science Age*, December 1987, 19 ~ 26.
- . "Srinivasa Ramanujan: Mathematician Extraordinary," *Science Today*, December 1974, 13 ~ 21.
- Ramanujan, Srinivasa. *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*. Ed. G. H. Hardy, P. V. Seshu Iyer, and B. M. Wilson. Cambridge University Press, 1927.
- . *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*. New Delhi: Narosa Publishing House, 1988.
- . *Notebooks*. 2 vols. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1957.
- Ramaseshan, S. "Srinivasa Ramanujan." In *Proceedings of the Ramanujan Centennial International Conference*, 15 ~ 18 December 1987, 1 ~ 14.
- Ranganathan, S. R. *Ramanujan: The Man and the Mathematician*. Bombay: Asia Publishing House, 1967.
- Rankin, R. A. "Ramanujan as a Patient." *Proceedings of the Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)* 93, nos. 2 & 3 (December 1984): 79 ~ 90.
- . "Ramanujan's Manuscripts and Notebooks." *Bulletin of the London Mathematical Society* 14 (1982): 81 ~ 97.
- . "Ramanujan's Manuscripts and Notebooks, II." *Bulletin of the London Mathematical Society* 21 (1989): 351 ~ 365.
- . "Srinivasa Ramanujan (1887 ~ 1920)." *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications* 23, nos. 10/11 (October/November 1987):

- 1988.
- Snow, C. P. "The Mathematician on Cricket." *Saturday Book*. 8th year. 1941 ~ 1942.
- . *Variety of Men*. New York: Charles Scribner's Sons, 1966. (Piece on Hardy appeared in slightly different form as foreword to 1967 edition of Hardy's *A Mathematician's Apology*.)
- Snow, Philip. *Stranger and Brother*. London: Macmillan, 1982.
- Srinivas, M. N. *Social Change in Modern India*. Berkeley: University of California Press, 1971.
- Srinivasachari, C. S. *History of the City of Madras*. Madras: P. Varadachary & Co., 1939.
- Srinivasan, P. K., ed. *Ramanujan Memorial Number*. Vol. 1, *Letters and Reminiscences*. Madras: Muthialpet High School, 1968.
- . *Ramanujan Memorial Number*. Vol. 2, *An Inspiration*. Madras: Muthialpet High School, 1967.
- Steegman, John. *Cambridge: As It Was, and As It Is Today*. 4th rev. ed. London: B. T. Batsford, 1949.
- Steevens, G. W. *In India*. Edinburgh: Blackwood and Sons, 1899.
- Stein, Burton, ed. *South Indian Temples: An Analytical Reconsideration*. New Delhi: Vikas Publishing House, 1978.
- Struik, Dirk J. *A Concise History of Mathematics*. 4th rev. ed. New York: Dover, 1987.
- Stubbs, Charles W. *The Story of Cambridge*. London: J. M. Dent & Co., 1905.
- Sud, Babu Lal. *How to Become a Barrister and Take a Degree at Oxford or Cambridge*. Kapurthala State, India: self-published, 1917.
- Tennyson, Charles. *Cambridge from Within*. Philadelphia: George W. Jacobs, 1913.
- Thomson, J. J. *Recollections and Reflections*. New York: Macmillan, 1937.
- Thurston, Edgar. *The Madras Presidency*. Cambridge University Press, 1914.
- Titchmarsh, E. C. "Godfrey Harold Hardy, 1877 ~ 1947." *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society* 6 (1949): 447 ~ 458.
- Tuckwell, Rev. W. *The Ancient Ways: Winchester Fifty Years Ago*. London:

- Macmillan & Co., 1893.
- Turnbull, H. W. *The Great Mathematicians*. London: Methuen & Co., 1929.
- Urwick, W. *India Illustrated*. Rev. and enl. by Edward P. Thwing. New York: Hurst, 1891.
- Venkataraman, G. 3 pt. series on Ramanujan in *The Hindu*: "Once in a Few Centuries," 20 December 1987; "A Turning Point for Ramanujan," 27 December 1987; "The Last Years of Ramanujan," 5 January 1988.
- Wagh, D. B. "Srinivasa Ramanujan: Number Theorist Extraordinary," *Bhawan's Journal* 33, no. 23 (July 1 ~ 15, 1987): 21 ~ 29.
- "The War." In *Historical Register of the University of Cambridge, Supplement, 1911 ~ 1920*. Cambridge University Press, 1922.
- Watson, Francis. *A Concise History of India*. New York: Thames and Hudson, 1979. 497
- Weinstein, Jay A. "Madras: An Analysis of Urban Ecological Structure in India." *Sage Research Papers in the Social Sciences*. Social Ecology of the Community Series, No. 90-015. Beverly Hills, 1974.
- White, William M. *Visitor's Guide to Cambridge*. 2d ed. Cambridge: Metcalfe & Co., 1890.
- Whitehead, Henry. *The Village Gods of South India*. Calcutta: The Association Press (in association with Humphrey Milford, Oxford University Press), 1916.
- Wiener, Norbert. *Ex-Prodigy*. New York: Simon and Schuster, 1953.
- . "Godfrey Harold Hardy, 1877 ~ 1947." *Bulletin of the American Mathematical Society* 55 (1949): 72 ~ 77.
- . *I Am a Mathematician*. Garden City, N. Y.: Doubleday, 1956.
- Williams, Mary Elizabeth. *A Bibliography of John Edensor Littlewood*. Elizabeth, N.J.: Pageant-Poseidon Press, 1974.
- Woolf, Leonard. *Beginning Again*. New York: Harcourt, Brace & World, 1963.
- . *Sowing*. New York: Harcourt, Brace & Co., 1960.
- Worswick, Clark, and Ainslie Embree. *The Last Empire*. Millerton, N.Y., 1976.

Wurmser, Leon. *The Mask of Shame*. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981.

Young, Laurence. *Mathematicians and Their Times*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1981.

## 译 后 记

译者曾专门向一些印度朋友请教 Ramanujan 这个名字的读音，感觉与“拉马努将”较为接近，故建议照此译出。但中译本责任编辑强调，原先较常用的译法“拉马努金”发音也与此相去不远，为力避一名多译，似仍以照旧为好。料想此事在数学界、在读者中还会有争议，遂在“译后记”中立此存照。

在翻译本书时遇到的最大困难是它涉及印度社会的许多方面：从她的文化、哲学、宗教、历史直到日常生活。除了一些通用的译名外，有些名词译者根据《简明不列颠百科全书》译出，有些只好按常用的读音自拟译名。但因几经转译：从印度各种语言转经英语直到中文，加上我国古来翻译佛经等形成的几乎是约定俗成的译法，很可能会有不准确的，或者混淆了的不同人名、神名等等。自然，译者知识的贫乏是主要原因。至于印度的食品等等，有时只好照抄原文。类似的还有关于英国文化、哲学、风俗的一些名词。译者虽曾努力作了必要的注解，但还有一些，例如英国板球中的一些专门用语，在无奈的情况下只好不译。

在译者加的译注中，也可能会有不妥和错误的地方。凡此种种敬请读者指正。

程少兰教授审阅和修改了全部译文，在此谨致谢意。

译者还应感谢张雁芳小姐出色的打字工作。

译者，2001 年底